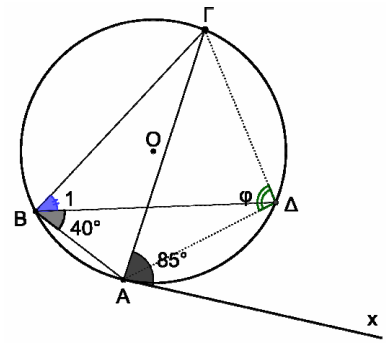


1. Στο σχήμα που ακολουθεί, η  $Ax$  είναι εφαπτομένη του κύκλου ( $O, \rho$ ) σε σημείο του  $A$  και επιπλέον ισχύουν  $\widehat{\Gamma Ax} = 85^\circ$  και  $\widehat{\Delta BA} = 40^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\hat{B}_1 = 45^\circ$ .

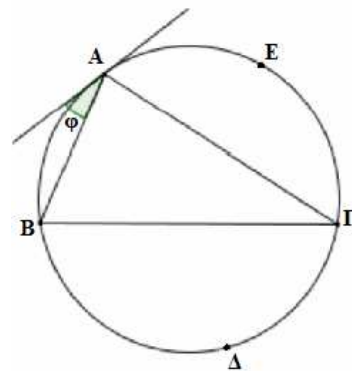
β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\varphi$ .



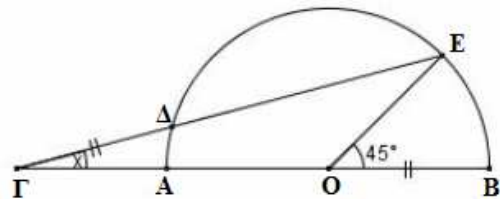
2. Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  σχηματίζει γωνία  $\varphi = 30^\circ$  με την πλευρά  $AB$ . Αν το μέτρο του τόξου  $B\Delta\Gamma$  είναι  $160^\circ$ ,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου  $A\epsilon\Gamma$ .



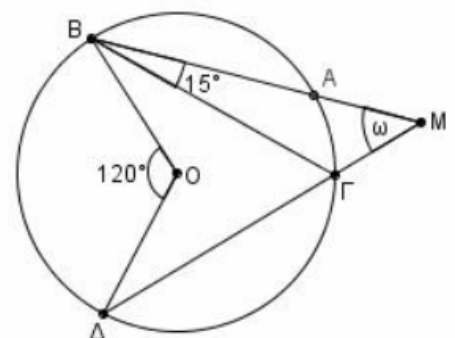
3. Σε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  προεκτείνουμε την  $BA$  προς το μέρος του  $A$  και παίρνουμε ένα σημείο  $\Gamma$ . Θεωρούμε  $E$  ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω  $\Delta$  το σημείο τομής του τμήματος  $\Gamma E$  με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα  $\Gamma\Delta$  ισούται με το  $OB$  και η γωνία  $\widehat{BOE} = 45^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{\Delta\Gamma O} = x$ .



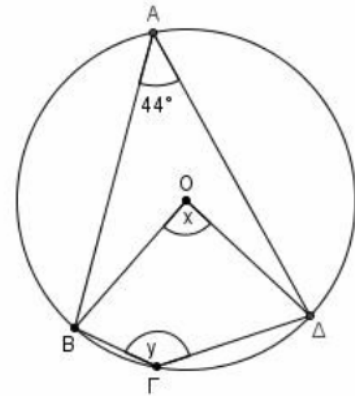
4. Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία  $\widehat{BO\Delta}$  είναι  $120^\circ$  και η γωνία  $\widehat{\Gamma BA}$  είναι  $15^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $B\Gamma\Delta$ .

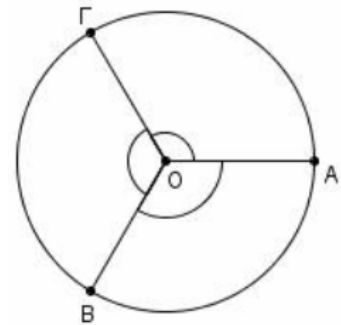
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\omega$  είναι  $45^\circ$ .



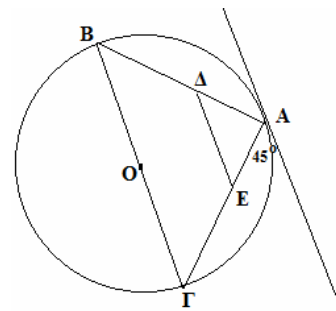
5. Σε κύκλο κέντρου  $O$  δίνονται οι χορδές  $AB$  και  $A\Delta$  τέτοιες ώστε η γωνία  $\widehat{BA\Delta}$  να είναι  $44^\circ$ . Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο  $B\Gamma\Delta O$ .
- α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $x$ .
- β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $y$  είναι  $136^\circ$ .



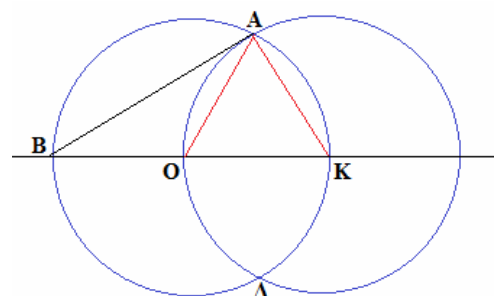
6. Σε κύκλο κέντρου  $O$  θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες  $AOB$ ,  $BOΓ$  και  $ΓOA$ .
- α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας  $AO$  διχοτομεί τη γωνία  $BOΓ$ .
- β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $ABΓ$  ως προς τις πλευρές του.
- γ) Αν με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $OK$  όπου  $K$  το μέσο της ακτίνας  $OA$ , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες  $OB$  και  $OΓ$  στα σημεία  $\Lambda$  και  $M$  αντίστοιχα, τότε τα τόξα  $KM$  και  $AB$  είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



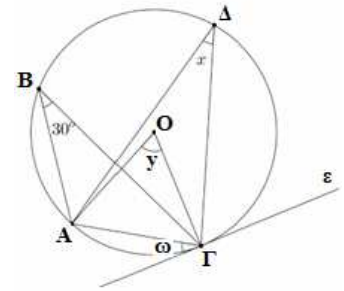
7. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου  $BΓ$ . Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του  $A$  ώστε να σχηματίζει με τη χορδή  $AΓ$  γωνία  $45^\circ$ . Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη  $BΓ$  που τέμνει την  $AB$  στο  $\Delta$  και την  $AΓ$  στο  $E$ .
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $BAΓ$ .
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $BΓE\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.



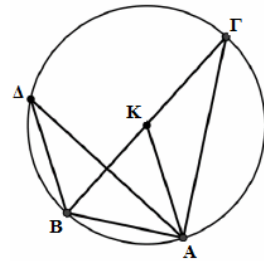
8. Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  με  $OK = \rho$ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $\Delta$ .
- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $OAK$  είναι ισόπλευρο.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $BAK$ .



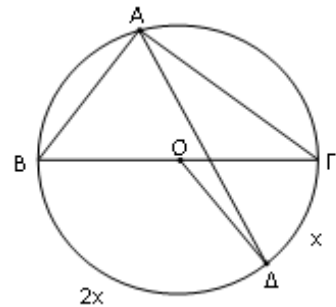
9. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται του κύκλου  $(O, \rho)$  στο σημείο  $\Gamma$ .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $x$ ,  $y$  και  $\omega$  δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.
  - Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $OAG$  ως προς τις πλευρές.



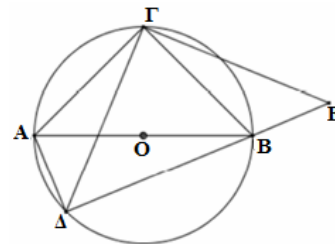
10. Έστω κύκλος κέντρου  $K$ , μια διάμετρος του  $B\Gamma$  και σημείο  $A$  του κύκλου τέτοιο ώστε  $BA=KA$ . Αν  $\Delta$  τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των  $B$  και  $\Gamma$ .
- να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $BKA$  είναι ισόπλευρο.
  - να υπολογίσετε την γωνία  $B\Delta A$ .
  - να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



11. Έστω κύκλος κέντρου  $O$  και διαμέτρου  $B\Gamma$ . Θεωρούμε τα σημεία  $A$  και  $\Delta$  του κύκλου εκατέρωθεν της  $B\Gamma$ , τέτοια ώστε το τόξο  $B\Delta$  να είναι διπλάσιο του τόξου  $\Delta\Gamma$ .  
Να υπολογίσετε:
- το μέτρο  $x$  του τόξου  $\Gamma\Delta$ .
  - τη γωνία  $BO\Delta$ .
  - τη γωνία  $BA\Delta$ .

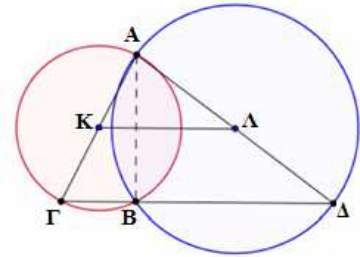


12. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$ , και έστω  $AB$  μια διάμετρος του,  $\Gamma$  το μέσο του ενός ημικυκλίου του και  $\Delta$  τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της  $\Delta B$  (προς το  $B$ ), θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $BE=AD$ .
- Να αποδείξετε ότι:
    - Τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $BE\Gamma$  είναι ίσα.
    - Η  $\Gamma\Delta$  είναι κάθετη στην  $\Gamma E$ .
  - Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο  $\Delta$  είναι το αντιδιαμετρικό του  $\Gamma$ , η  $\Gamma E$  είναι εφαπτομένη του κύκλου.



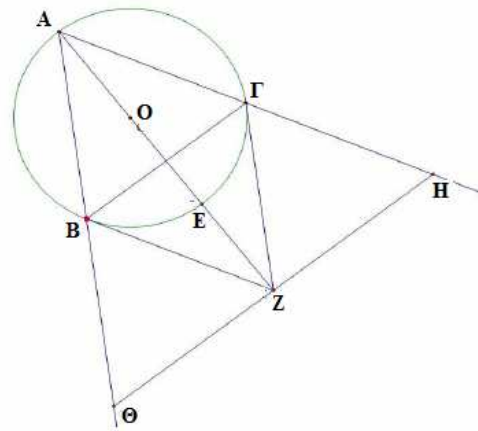
13. Δύο κύκλοι  $(K, \rho)$ ,  $(\Lambda, R)$  τέμνονται σε δύο σημεία  $A, B$ . Αν  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του  $A$  στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$ .  
 β) τα σημεία  $\Gamma, B, \Delta$  είναι συνευθειακά.  
 γ) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία  $K, \Lambda, \Gamma, \Delta$  είναι τραπέζιο.



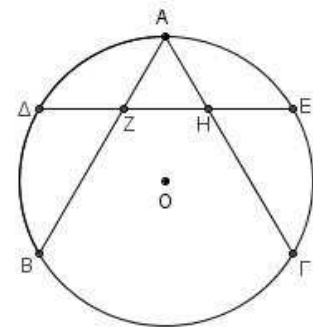
14. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Τα τμήματα  $\Gamma Z$  και  $BZ$  είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία  $\Gamma$  και  $B$  αντίστοιχα. Αν το τμήμα  $\Theta H$  είναι κάθετο στο τμήμα  $AZ$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $ZB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.  
 β) Το τετράπλευρο  $AGZB$  είναι ρόμβος.  
 γ) Το τετράπλευρο  $B\Gamma H\Theta$  είναι τραπέζιο, με  $B\Theta = BZ$  και  $\Theta H = 2 \cdot B\Gamma$ .



15. Σε κύκλο κέντρου  $O$  θεωρούμε τα ίσα τόξα  $AB$  και  $AG$ , το καθένα ίσο με  $120^\circ$ . Έστω  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των τόξων  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.  
 β) Τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $AHE$  είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.  
 γ) Η χορδή  $\Delta E$  τριχοτομείται από τις χορδές  $AB$  και  $AG$ .



16. Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με διάμετρο  $AB$  και δυο ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου  $AB$ . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται του κύκλου σε ένα σημείο του  $E$  και τέμνει τις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  στα  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

- α) Αν το σημείο  $E$  δεν είναι το μέσο του τόξου  $AB$ , να αποδείξετε ότι:  
 i. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο.  
 ii.  $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$ .  
 β) Αν το σημείο  $E$  βρίσκεται στο μέσον του τόξου  $AB$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογώνιου  $A\Delta\Gamma B$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$  του κύκλου.

17. Έστω ότι ο κύκλος  $(O, \rho)$  εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

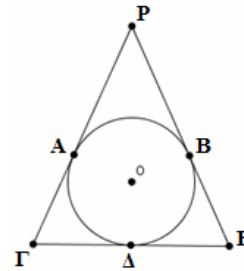
i.  $PG = \Gamma\Delta + AP$ .

ii.  $PG - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$ .

β) Αν  $AG = BE$ , να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά.



18. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές.

β)  $\Gamma A = \Delta B$ .

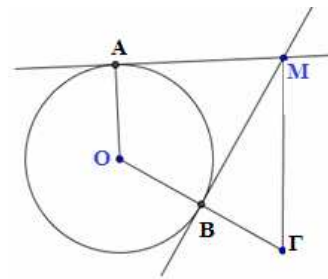
γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με  $PA + PB$ .

19. Από σημείο Μ εξωτερικό κύκλου  $(O, \rho)$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ του κύκλου. Αν Γ είναι το συμμετρικό σημείο του κέντρου Ο ως προς την ΜΒ, να αποδείξετε ότι:

α)  $MA = MB = M\Gamma$

β)  $\widehat{AM\Gamma} = 3\widehat{BM\Gamma}$

γ) το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο του κύκλου.

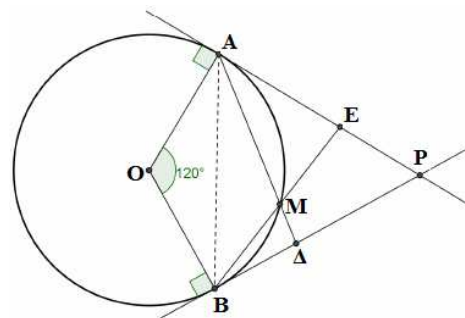


20. Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και μια επίκεντρη γωνία του  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο σημείο Ρ. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ και φέρουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ, οι οποίες προεκτείνονται τέμνουν τις ΡΒ και ΡΑ και στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο.

β)  $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$ .

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΡΕΒ είναι ίσα.

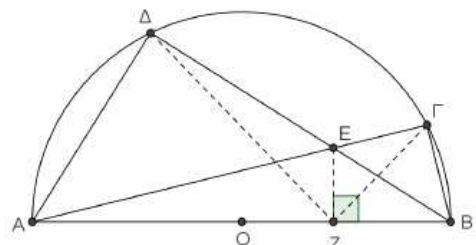


21. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Φέρουμε  $EZ \perp AB$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ΔΑΓ και ΔΒΓ είναι ίσες.

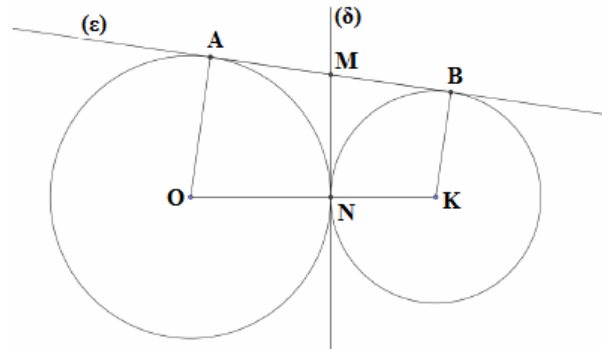
β) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα.

γ) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\Delta Z \Gamma}$ .



22. Δύο κύκλοι  $(O, \rho_1)$ ,  $(K, \rho_2)$  εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την  $(\epsilon)$  στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ.  
 β)  $\widehat{OMK} = 90^\circ$ .  
 γ)  $\widehat{ANB} = 90^\circ$ .

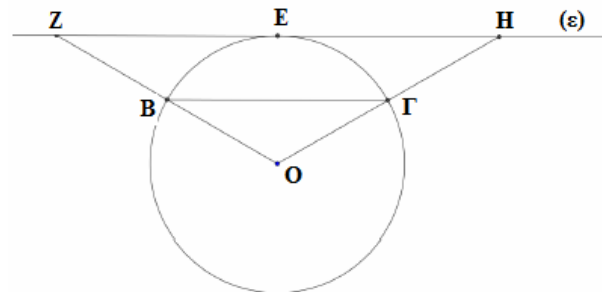


23. Έστω κύκλος  $(O, \rho)$  και Ε το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται στο κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ τέμνουν την ευθεία  $(\epsilon)$  στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- α)  $B\Gamma \parallel ZH$   
 β)  $OZ = OH$   
 γ) Αν Β είναι το μέσον της ΟΖ:

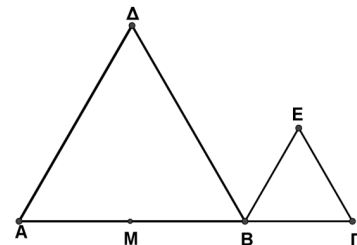
i. να αποδείξετε ότι  $\widehat{BEZ} = \frac{\widehat{ZOH}}{4}$ .

- ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ.



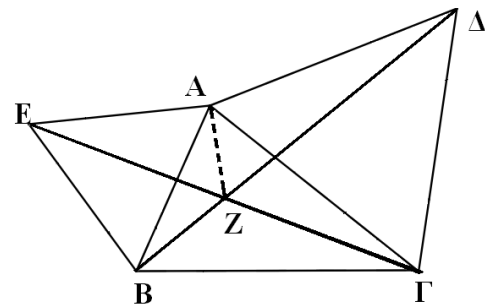
24. Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία με  $AB = 2BG$ . Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο ( $AD \parallel BE$ ).  
 β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα.  
 γ) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράμιμο.



25. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών  
 β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράμιμα.  
 γ) Η γωνία ΒΖΓ είναι  $120^\circ$ .



26. Δίνεται ορθή γωνία  $\widehat{xOy} = 90^\circ$  και A, B σημεία των ημιευθειών Oy, Ox, με  $OA=OB$ . Η (ε) είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή O και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο A στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην (ε) την τέμνει στο E.

Να αποδείξετε ότι:

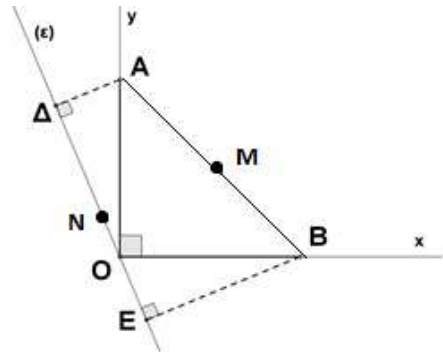
α) Τα τρίγωνα OAD και OEB είναι ίσα.

β)  $AD+BE=DE$ .

γ)  $MN = \frac{DE}{2}$ , όπου MN είναι το ευθύγραμμο

τμήμα που ενώνει τα μέσα των DE και AB.

δ) Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο ισοσκελές.



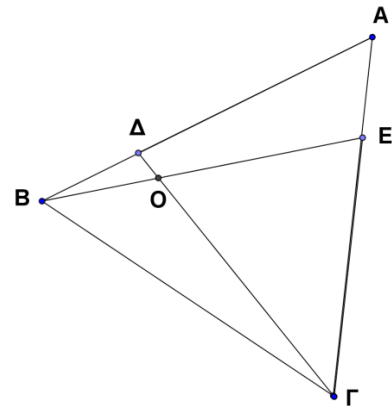
27. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι  $AD=GE$ . Έστω O το σημείο τομής των ΓΔ και BE.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\widehat{BEG} = \widehat{GAA}$ .

ii.  $\widehat{BOG} = 120^\circ$ .

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο AEOΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



28. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με  $AB=AG$  και AD, BE τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α)  $BΓ=2EΔ$ .

β)  $\widehat{BEΔ} = \frac{\hat{A}}{2}$ .

γ) Το τετράπλευρο AEDB είναι εγγράψιμο.

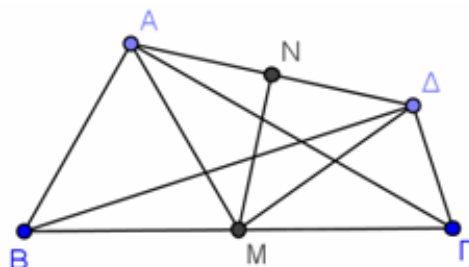
δ)  $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$ .

29. Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και ΔBΓ με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  και M, N τα μέσα των BΓ και AΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $AM=MΔ$ .

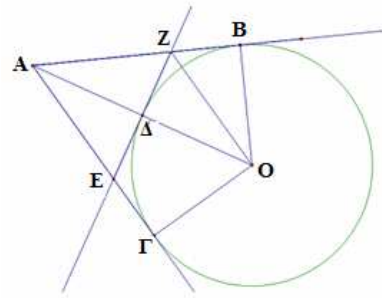
β) Η MN είναι κάθετη στην AΔ.

γ)  $\widehat{ΓBΔ} = \widehat{ΓAΔ}$ .



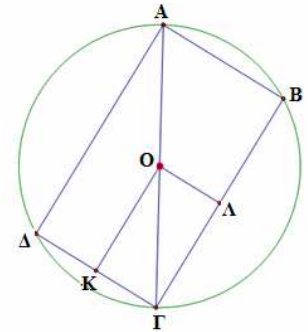
30. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Έστω σημείο  $A$  εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα  $AB$  και  $AG$  ώστε να ισχύει  $\widehat{BA\Gamma} = 60^\circ$ . Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο  $\Delta$  τέμνει τις  $AB$  και  $AG$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $ABO\Gamma$  είναι εγγράψιμο με  $OA = 2OB$ .
- β) Το τρίγωνο  $AEZ$  είναι ισόπλευρο.
- γ)  $2ZB = AZ$ .
- δ) Το τετράπλευρο  $EZB\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



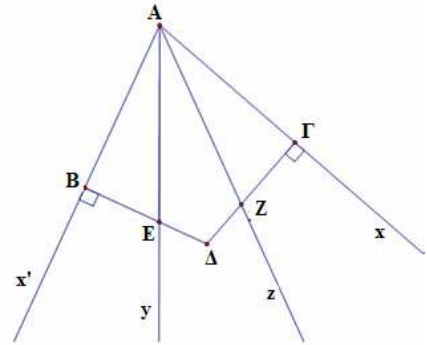
31. Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  και  $AG$  μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές  $AD = BG$ . Έστω  $K$  και  $\Lambda$  τα μέσα των χορδών  $\Delta\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι χορδές  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  είναι παράλληλες.
- β) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- γ) Η  $B\Delta$  είναι διάμετρος του κύκλου.
- δ) Το τετράπλευρο  $O\Lambda\Gamma K$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



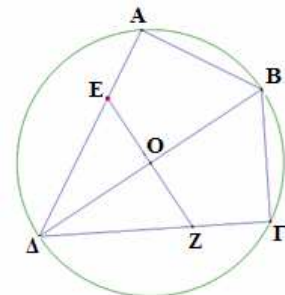
32. Στις πλευρές  $Ax'$  και  $Ax$  γωνίας  $x'Ax$  θεωρούμε σημεία  $B$  και  $\Gamma$  ώστε  $AB = AG$ . Οι κάθετες στις  $Ax'$  και  $Ax$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα, τέμνονται στο  $\Delta$ . Αν οι ημιευθείες  $Ay$  και  $Az$  χωρίζουν τη γωνία  $x'Ax$  σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις  $B\Delta$  και  $\Delta\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $EAZ$  είναι ισοσκελές.
- β) Το  $\Delta$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $x'Ax$ .
- γ) Οι γωνίες  $\Gamma B\Delta$  και  $\Gamma A\Delta$  είναι ίσες.



33. Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και ο περιγεγραμμένος κύκλος  $(O, \rho)$  ώστε η διαγώνιος του  $\Delta B$  να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία  $B$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\Delta$  και οι πλευρές  $AB$  και  $B\Gamma$  είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη  $B\Delta$  στο  $O$ , η οποία τέμνει τις πλευρές  $A\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$ .
- β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta AB$  και  $\Delta\Gamma B$ .
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma O$  είναι ρόμβος.
- δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ABOE$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



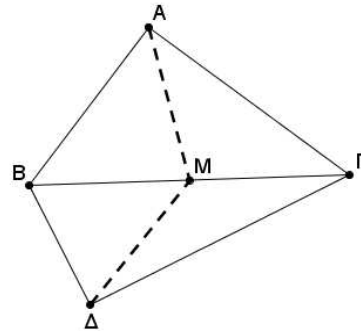


34. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) και  $\Delta B\Gamma$  ( $\hat{\Delta}=90^\circ$ ) (όπου  $A$  και  $\Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$ ) και το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AM\Delta$  είναι ισοσκελές.

β)  $\widehat{AM\Delta} = 2\widehat{A\Gamma\Delta}$ .

γ)  $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}$ .



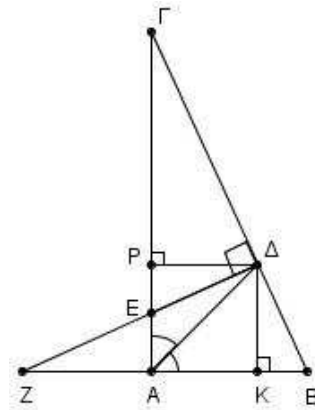
35. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) φέρουμε τη διχοτόμο του  $A\Delta$ . Έστω  $\Delta K$  και  $\Delta P$  οι προβολές του  $\Delta$  στις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Η κάθετη της  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $E$  και την προέκταση της πλευράς  $AB$  (προς το  $B$ ) στο σημείο  $Z$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{B} = \widehat{\Delta E\Gamma}$ .

ii.  $\Delta E = \Delta B$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta\Gamma Z$ .



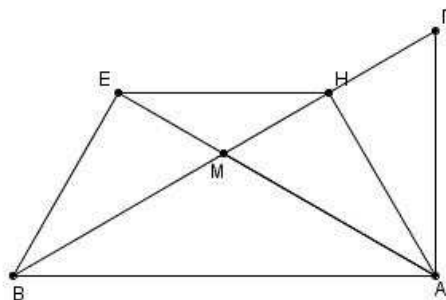
36. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) έχουμε ότι  $\hat{B}=30^\circ$ . Φέρουμε το ύψος  $AH$  και τη διάμεσο  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Από την κορυφή  $B$  φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο  $AM$ , η οποία την τέμνει στο σημείο  $E$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $BE = \frac{AB}{2}$ .

β)  $AH = BE$ .

γ) το τετράπλευρο  $AHEB$  είναι εγγράψιμο

δ)  $EH \parallel AB$ .



37. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O,R)$ . Έστω σημείο  $\Delta$  του τόξου  $AB$  τέτοιο ώστε  $\Delta B \perp B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta \perp A\Gamma$ .

β) Έστω  $H$  το ορθόκентρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta B H$  είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν  $M$  το μέσον της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $OM = \frac{AH}{2}$ .

- 38.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρουμε τα ύψη  $AK$  και  $GL$ . Αν  $E$  το μέσο της πλευράς  $AG$  τότε:
- α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KE\Lambda$  είναι ισοσκελές.
  - β)** Αν η γωνία  $B$  είναι  $80^\circ$ , να αποδείξετε ότι η  $KL$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BKE$ .