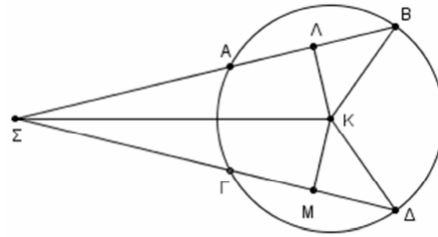


1. Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (K, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ του κύκλου για τις οποίες ισχύει $\Sigma B = \Sigma \Delta$. Τα $K\Lambda$ και KM είναι τα αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma \Delta$ του κύκλου αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα $KB\Sigma$ και $K\Delta\Sigma$ είναι ίσα.
- ii. $K\Lambda = KM$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές AB και $\Gamma \Delta$ είναι ίσες.



2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE . Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $B\Gamma \Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.
- β) $EH = \Delta Z$.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

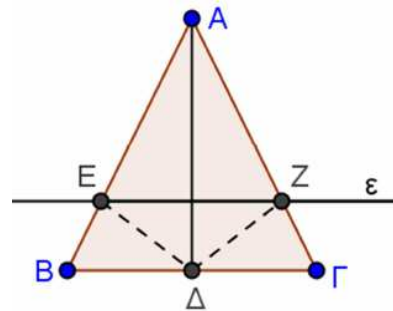
- α) $A\Delta = \Delta E$
- β) $A\Delta < \Delta B$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $BE = AB$.
- β) Αν επιπλέον $\widehat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma \Delta E$.

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ϵ) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\epsilon Z$ είναι ισοσκελές.
- β) Τα τρίγωνα $A\epsilon \Delta$ και $A Z \Delta$ είναι ίσα.



6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $B\Delta \Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα.
- β) $A\Delta = A E$.

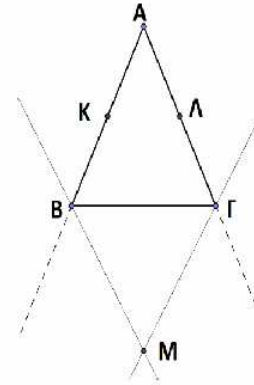
7. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $MK = M\Lambda$.
- β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $KM\Lambda$.

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
 Να αποδείξετε ότι
 α) $M\Delta = ME$
 β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.
 α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB=MG$.
 β) Να δείξετε ότι $MK=ML$.



10. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών B και Γ . Να αποδείξετε ότι:
 α) Το τρίγωνο BIG είναι ισοσκελές.
 β) Οι γωνίες AIG και AIB είναι ίσες.
 γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.
11. Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B'=A'\Gamma'$).
 α) Να αποδείξετε ότι, αν ισχύει $AB=A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.
 β) Να αποδείξετε ότι, αν ισχύει $A\Gamma=A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.
12. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
 α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
 β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma=AB$.
13. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.
 Να αποδείξετε ότι:
 α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
 β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.
14. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της AB (προς το A). Να αποδείξετε ότι:
 α) $AB=BE$
 β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

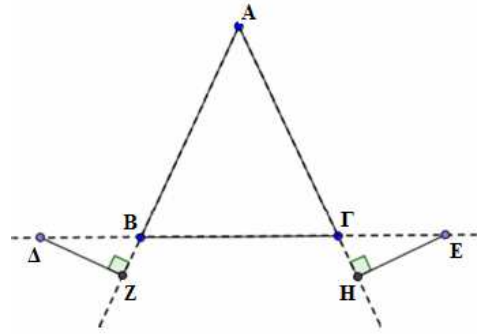
15. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta=\Gamma E$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $E H \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ=\Gamma H$.

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

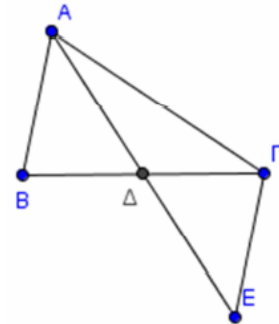
β) Αν $\hat{A}=50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .



16. Στο ακόλουθο σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E=A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB=\Gamma E$

β) $A\Delta < \frac{AB+A\Gamma}{2}$.



17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

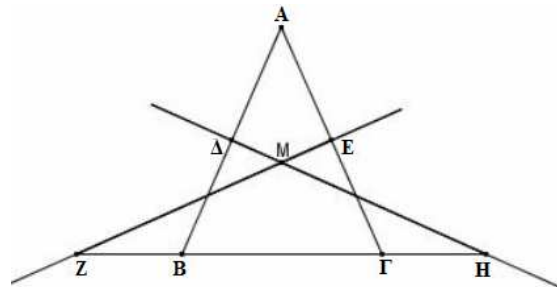
α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

18. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\Delta B H$ και $E Z \Gamma$.

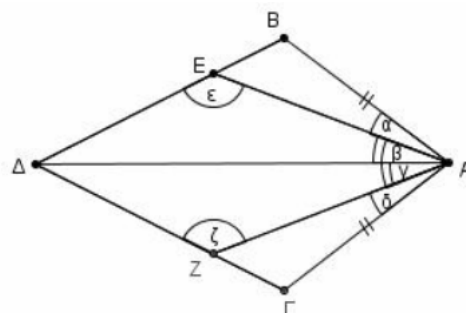
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M Z H$ είναι ισοσκελές.



19. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha}=\hat{\delta}$, $\hat{\beta}=\hat{\gamma}$ και $AB=A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

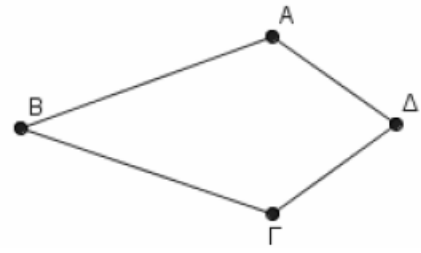
α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες.



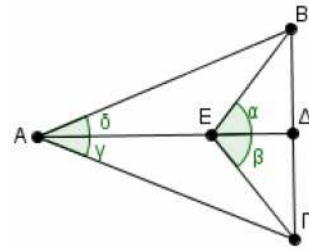
20. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B\Gamma A}$.
- β) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.



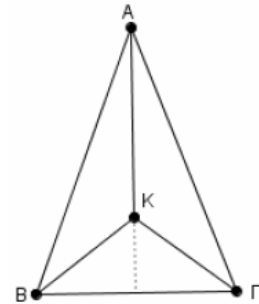
21. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

- α) Τα τρίγωνα AEB και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
- β) Το τρίγωνο ΓEB είναι ισοσκελές.
- γ) Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.



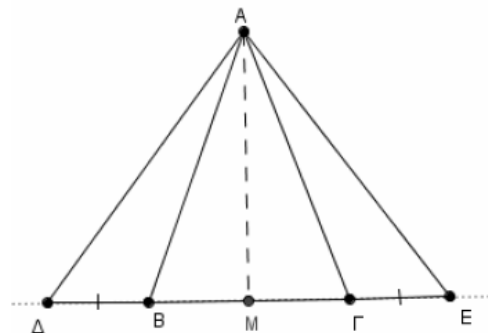
22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB=K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.
- β) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$.
- γ) Η προέκταση της AK διχοτομεί τη γωνία $BK\Gamma$ του τριγώνου $BK\Gamma$.



23. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$.
- β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
- γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

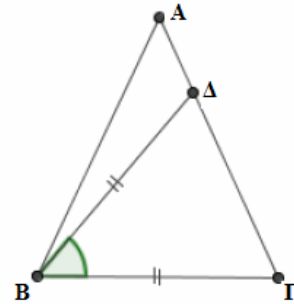


24. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta=AB$ και $A\epsilon=A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

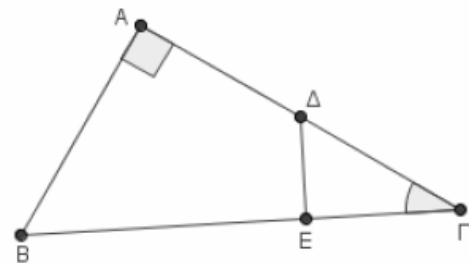
- α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι ίσα.
- β) Η προέκταση της διαμέσου AM προς το μέρος της κορυφής A διχοτομεί την πλευρά $E\Delta$ του τριγώνου $\Delta A\epsilon$.

25. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB=MG$. Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα.
 - Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία BMG .

26. Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία $A=50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς AG , τέτοιο ώστε $B\Delta=B\Gamma$.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta B\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία A .

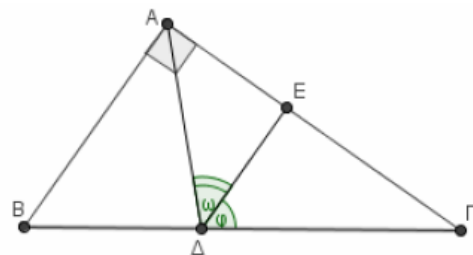


27. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) με $\Gamma=40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς AG και $\Delta E \perp B\Gamma$. Να υπολογίσετε:
- τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.
 - τις γωνίες του τετράπλευρου $A\Delta E B$.

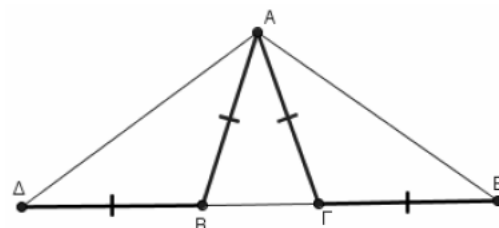


28. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία κορυφής $A=40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta=AB$. Να υπολογίσετε:
- τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - τη γωνία $\Delta A\Gamma$.

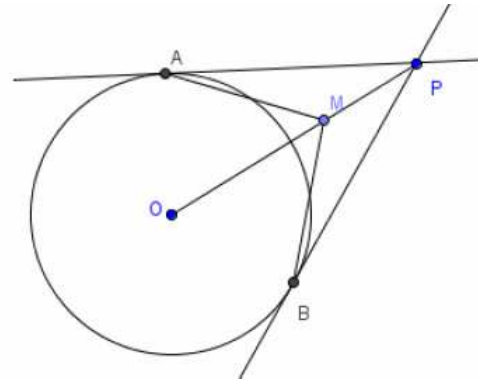
29. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$). Έστω ότι η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας A και η $\Delta E \parallel AB$. Αν η $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$:
- να υπολογίσετε:
 - τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - τις γωνίες φ και ω .
 - να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



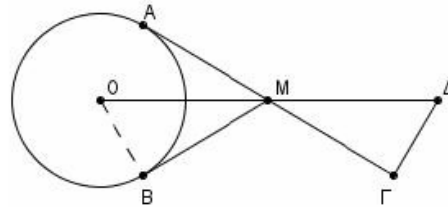
30. Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B=BA=AG=GE$ και $\widehat{BA\Gamma}=40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:
- $\widehat{AB\Delta} = \widehat{AG\Gamma} = 110^\circ$.
 - τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Gamma$ είναι ίσα.
 - το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές.



31. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:
- τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.
 - οι γωνίες \widehat{MAO} και \widehat{MBO} είναι ίσες.



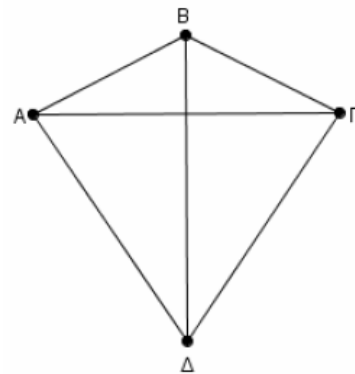
32. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma=MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta=OM$.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα, και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.
 - Να αιτιολογήσετε γιατί $OA \parallel \Gamma\Delta$.



33. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB=AG$) και στις ίσες πλευρές AB,AG παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta=\frac{1}{3}AB$ και $A\epsilon=\frac{1}{3}AG$. Αν M είναι το μέσο της BΓ, να δείξετε ότι:
- τα τμήματα BΔ και ΓE είναι ίσα.
 - τα τρίγωνα BΔM και MEΓ είναι ίσα.
 - το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

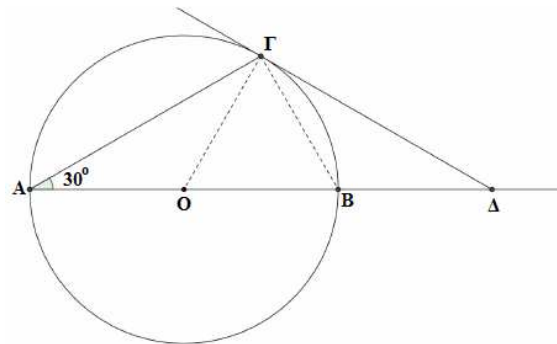
34. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA=KB$) και KΓ διχοτόμος της γωνίας K. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M, έτσι ώστε $A\Lambda=BM$. Να αποδείξετε ότι:
- το τρίγωνο KΛM είναι ισοσκελές
 - η KΓ είναι διάμεσος του τριγώνου KΛM

35. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ με $BA=BG$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι AΓ, BΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:
- Η BΔ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου ABΓΔ.
 - Η BΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AΓ.



36. Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB, και χορδή ΑΓ τέτοια ώστε $\widehat{BA\Gamma} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΓΒΔ είναι ίσα.

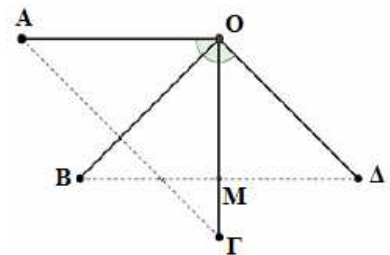


37. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε OA=OB. Να αποδείξετε ότι:

- α) MA=MB.
β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB.

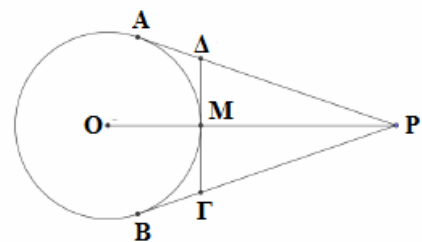
38. Αν $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{GO\Delta}$ και OA=OB=OΓ=OΔ, να αποδείξετε ότι:

- α) ΑΓ=ΒΔ .
β) το Μ είναι μέσον της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.



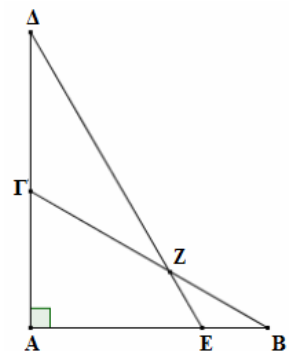
39. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ.



40. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.

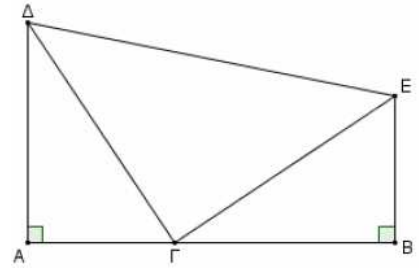
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΕΖΓ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή.



41. Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες A και B είναι ορθές και επιπλέον $AD=BG$ και $AG=BE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle AG\Delta$ και $\triangle BGE$ είναι ίσα.

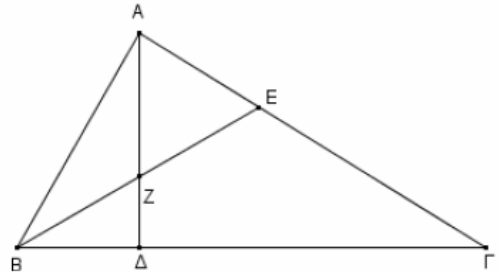
β) Αν η γωνία $\widehat{EGB}=40^\circ$ τότε το τρίγωνο $\triangle GE$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



42. Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° .

β) Αν το ύψος του $\triangle AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $\angle B$ τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AZE$ είναι ισόπλευρο.

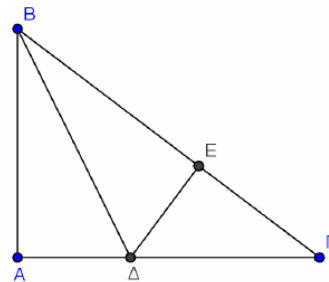


43. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A}=90^\circ$). Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B, η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B. Να αποδείξετε ότι:

α) $AD=DE$.

β) $AD < DG$.

γ) $AG > AB$.



44. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle AMB$.

45. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB=AG$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AD=AE$.

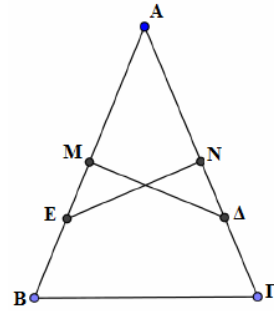
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE=GD$

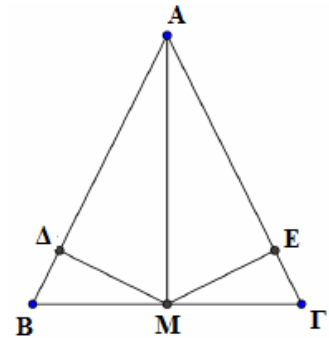
β) $BD=GE$

γ) $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{EGB}$.

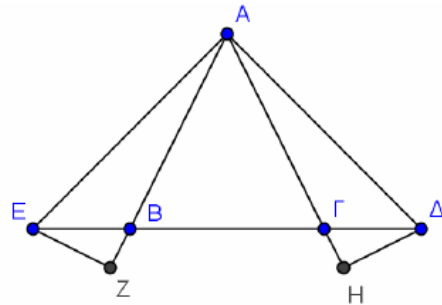
46. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Αν $M\Delta=NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 - Αν $AB=A\Gamma$ τότε $M\Delta=NE$.



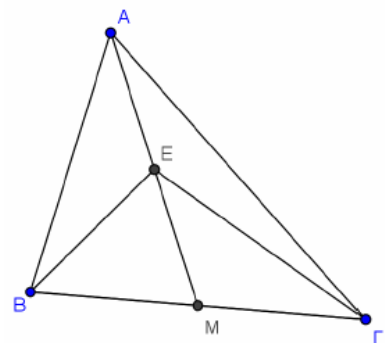
47. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Αν $M\Delta=ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.
 - Αν $AB=A\Gamma$ και M μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta=ME$.



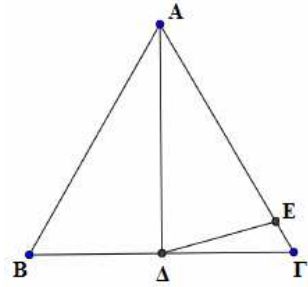
48. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta=BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:
- $A\Delta=AE$
 - $EZ=\Delta H$.



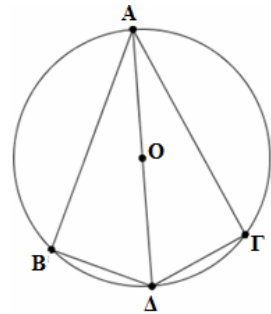
49. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma=2 BE$ να αποδείξετε ότι:
- $\widehat{AEB} = \widehat{EM\Gamma}$.
 - $AB = E\Gamma$.



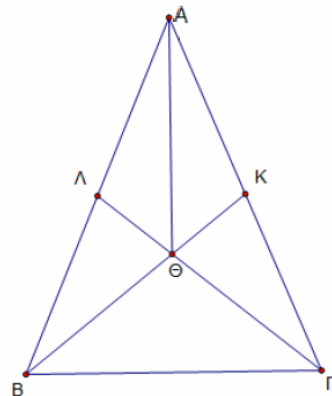
50. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\widehat{BA\Delta}=30^\circ$.
 Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta=AE$.
 α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
 β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.
 γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.



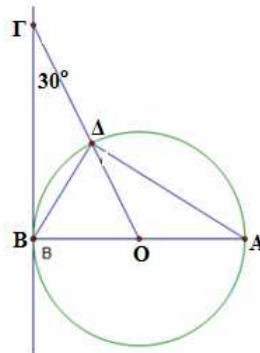
51. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Αν η διάμετρος $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
 α) Τα τόξα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
 β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



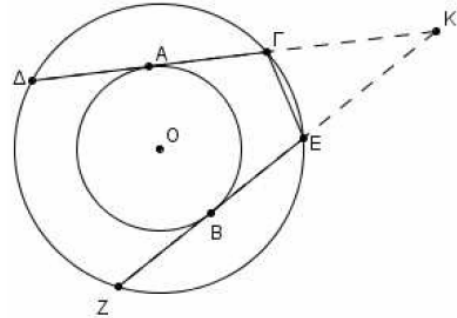
52. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και τις διαμέσους του $B\Lambda$ και $\Gamma\Lambda$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ . Να αποδείξετε ότι:
 α) Οι διάμεσοι $B\Lambda$ και $\Gamma\Lambda$ είναι ίσες.
 β) Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα.



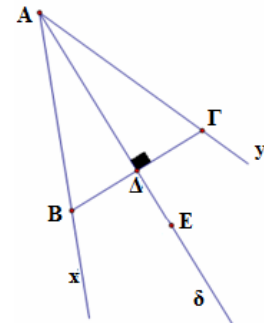
53. Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρό του AB . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο B θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία $B\Gamma O$ να είναι ίση με 30° . Αν η $O\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:
 α) $O\Gamma=2OA$.
 β) $B\Gamma=A\Delta$.



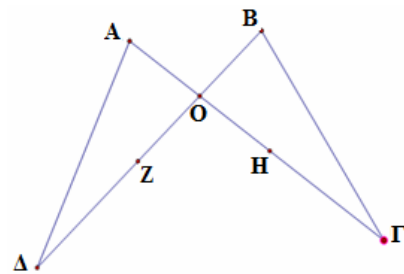
54. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και $Z\epsilon$ του κύκλου (O,R) εφάπτονται του κύκλου (O,ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.
- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = Z\epsilon$.
- β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και $Z\epsilon$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΚΕΓ$ είναι ισοσκελές.



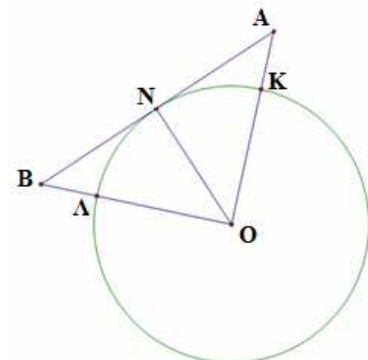
55. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:
- α) Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα.
- β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .



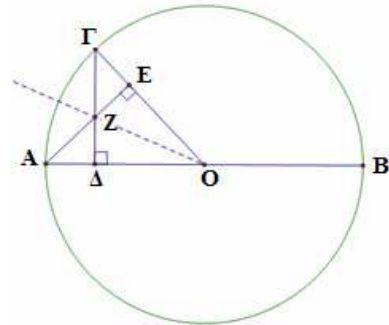
56. Δίνονται τα τμήματα $A\Gamma = B\Delta$ που τέμνονται στο σημείο O έτσι ώστε $OA = OB$, και τα σημεία H και Z στα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $OH = OZ$. Να αποδείξετε ότι:
- α) Οι γωνίες $\widehat{A\Delta O}$ και $\widehat{B\Gamma O}$ είναι ίσες.
- β) $AZ = BH$.



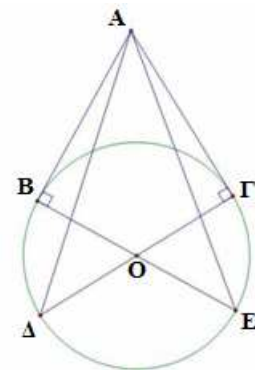
57. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- α) Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.
- β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $Κ\Lambda$.



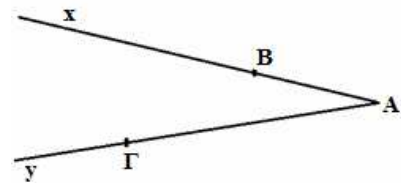
58. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.
 - Η OZ διχοτομεί τη γωνία $AO\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου $A\Gamma$.



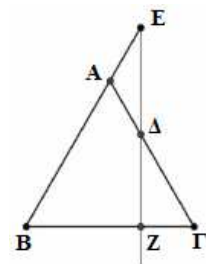
59. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$. Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
 - Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.



60. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δυο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:
- ισαπέχει από τα δυο πλατάνια.
 - ισαπέχει από τα δυο ποτάμια.
 - ισαπέχει και από τα δυο πλατάνια και από τα δυο ποτάμια.
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

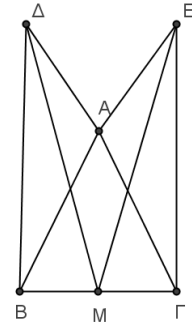


61. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = A\Delta$.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.
 - Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.



62. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα,
β) $A\Delta = AE$.

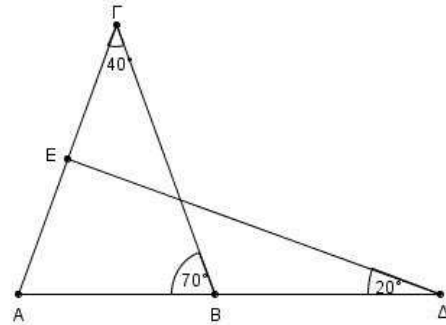


63. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$).

- α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.
β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

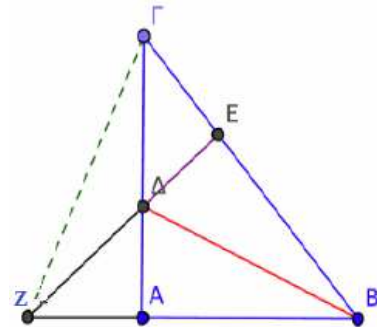
64. Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,
β) η γωνία $AE\Delta$ είναι ορθή.



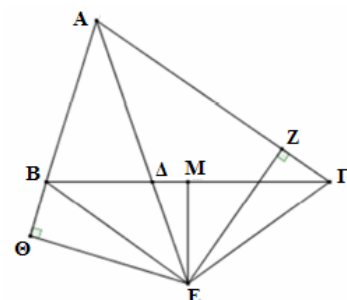
65. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB (προς το A) στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α) $BE = AB$.
β) το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.



66. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου $A\Delta$ στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις AB, AG , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $E\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΘBE και $Z\Gamma E$ είναι ίσα.
γ) $\widehat{AG\Gamma} + \widehat{ABE} = 180^\circ$.



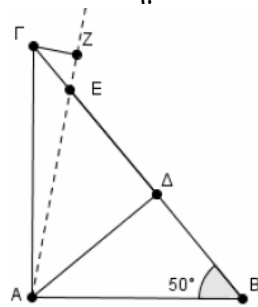
67. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) με $\hat{B}=50^\circ$, το ύψος του AD και σημείο E στην $\Delta\Gamma$ ώστε $\Delta E=B\Delta$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

ii. $\widehat{\Gamma A E}=10^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$.



68. Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

69. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) και το ύψος του AH . Έστω Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και AG αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AH=A\Delta=AE$.

ii. Το τρίγωνο EHA είναι ορθογώνιο.

iii. Τα σημεία E , A και Δ είναι συνευθειακά.

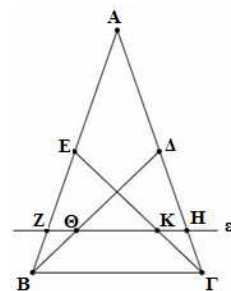
β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και EHA είναι ίσα; Αν ναι, να το αποδείξετε. Αν όχι, κάτω από ποιες αρχικές προϋποθέσεις θα μπορούσε να είναι ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

70. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Μία ευθεία ϵ παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ=GH$.

β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.

γ) $ZK=H\Theta$.



71. Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ϵ), τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ϵ). Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ϵ).

α) Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ϵ) διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOA'}$.

ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ϵ)

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ϵ), να αποδείξετε ότι:

i. $KA=KA'$.

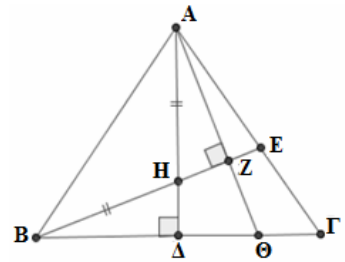
ii. $KA+KB > AO+OB$.

72. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Στο $A\Delta$ θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA=HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$. Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.
- ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$.
- iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

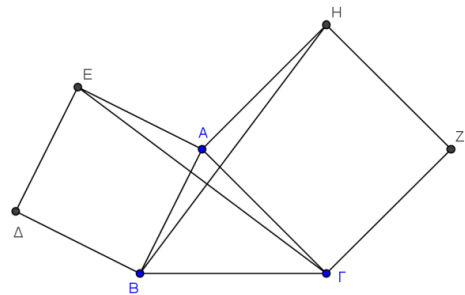


73. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{EAH} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}$.

β) $EG = BH$

γ) $EG \perp BH$.

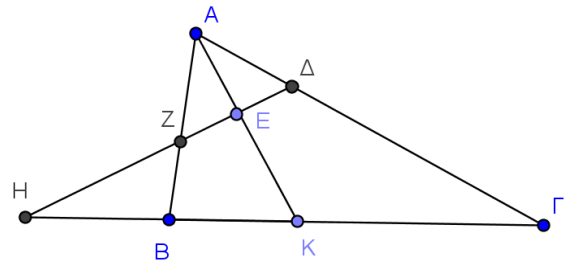


74. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκτασή της ΓB στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

β) $ZK = K\Delta$.

γ) $\widehat{ZH\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

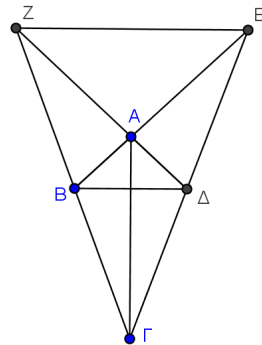


75. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=A\Delta$ και $\Gamma B=\Gamma\Delta$. Αν E το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

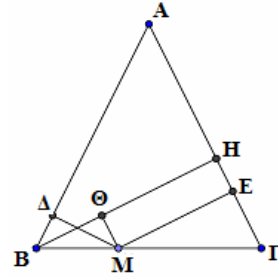
α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.

β) $\Gamma Z = \Gamma E$.

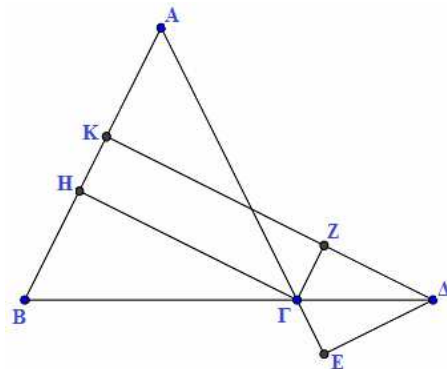
γ) $EZ \parallel B\Delta$.



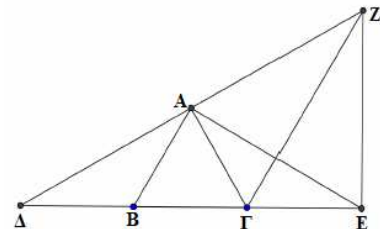
76. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , AG και BH αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.
 - $B\Theta=\Delta M$.
 - $M\Delta+ME=BH$.



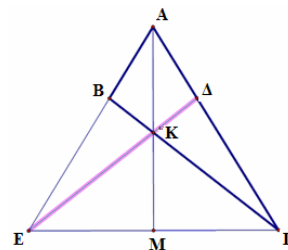
77. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της AG . Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B .
 - Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$.
 - Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.
 - $\Delta K-\Delta E=H\Gamma$.



78. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta=B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E=B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην EZ στο σημείο Z , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓAE και $B\Delta A$.
 - Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του AE .
 - Να αποδείξετε ότι $AB//\Gamma Z$.



79. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB<AG$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE=AG$. Στην πλευρά AG θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta=AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:
- $B\Gamma=\Delta E$.
 - $BK=K\Delta$.
 - Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .
 - Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

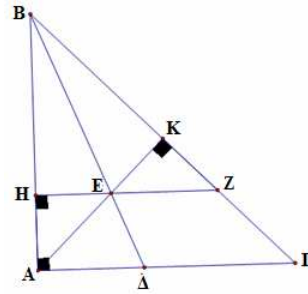


80. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα EHA και EKZ είναι ίσα.
- ii. το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές τρίγωνο.
- iii. Οι AZ και $B\Delta$ είναι κάθετες.

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .

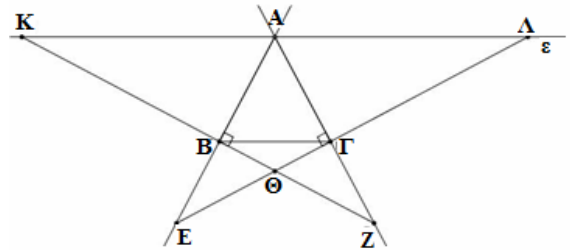


81. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $AZ=AE$
- ii. $AK=AL$

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ και $E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.



82. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE=AB$. Να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.
- β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE .
- γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .

