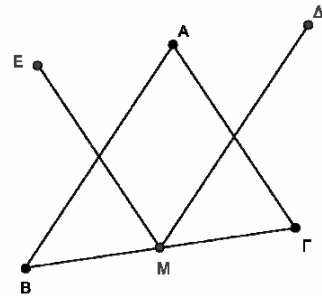


1. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB=2B\Gamma$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta E=A\Delta$  και φέρουμε την  $BE$  που τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:
  - α) το τρίγωνο  $BAE$  είναι ισοσκελές.
  - β) το  $\Delta E\Gamma B$  είναι παραλληλόγραμμο.
  - γ) η  $AH$  είναι διάμεσος του  $BAE$  τριγώνου.
  
2. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του  $BM$  και  $\Gamma N$ . Προεκτείνουμε την  $BM$  (προς το  $M$ ) κατά τμήμα  $M\Delta=BM$  και την  $\Gamma N$  (προς το  $N$ ) κατά τμήμα  $NE=\Gamma N$ .
  - α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta//B\Gamma$  και  $AE//B\Gamma$ .
  - β) Είναι τα σημεία  $E$ ,  $A$  και  $\Delta$  συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
  
3. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και η διαγώνιός του  $B\Delta$ . Από τις κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  φέρουμε τις κάθετες  $AE$  και  $\Gamma Z$  στη  $B\Delta$ , που την τέμνουν στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.
  - α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $\Gamma B Z$  είναι ίσα.
  - β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A E \Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο.
  
4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο προς την πλευρά  $BA$  και ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο προς την πλευρά  $\Gamma A$ . Να αποδείξετε ότι:
  - α)  $\Delta A=AE$
  - β) Τα σημεία  $\Delta$ ,  $A$  και  $E$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
  - γ)  $\Delta E=B\Gamma$ .

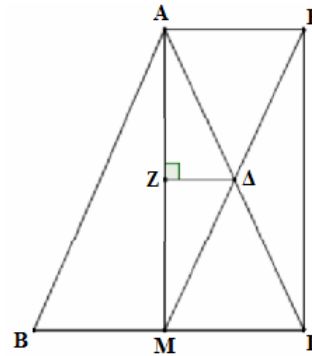


5. Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , προεκτείνουμε την πλευρά  $\Delta A$  (προς το  $A$ ) κατά τμήμα  $AH=\Delta A$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Delta$ , η οποία τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:
  - α) Το τρίγωνο  $A\Delta Z$  είναι ισοσκελές.
  - β) Το τρίγωνο  $\Delta ZH$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $Z$ .
  
6. Δίνεται  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο με  $AB=2A\Delta$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Delta$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ .
  - α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.
  - β) Είναι το σημείο  $E$  μέσο της πλευράς  $AB$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
  
7. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο  $E$  του τμήματος  $AO$  και σημείο  $Z$  του τμήματος  $OG$ , ώστε  $OE=OZ$ . Να αποδείξετε ότι:
  - α)  $\Delta E=BZ$
  - β) το  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.
  
8. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB=2B\Gamma$  και  $E$  το μέσο της πλευράς του  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:
  - α) Το τρίγωνο  $EAD$  είναι ισοσκελές.
  - β) Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ .

9. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $AM$ . Στην προέκταση της διαμέσου  $M\Delta$  του τριγώνου  $AM\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $M\Delta = \Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο  $AM\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.
  - Η  $BE$  διέρχεται από το μέσο της διαμέσου  $AM$ .

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και η διάμεσός του  $AM$ . Στην προέκταση της διαμέσου  $M\Delta$  του τριγώνου  $AM\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $M\Delta = \Delta E$ . Αν το σημείο  $Z$  είναι το ίχνος του  $\Delta$  στην  $AM$ , να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο  $AM\Gamma E$  είναι ορθογώνιο.

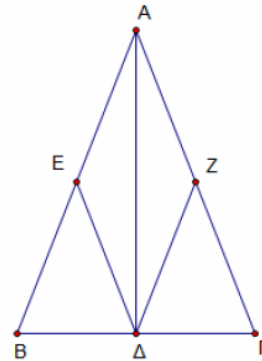
$\beta)$   $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$ .



11. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), το ύψος του  $A\Delta$  και τα μέσα  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $B\Delta E$  και  $\Gamma\Delta Z$  είναι ίσα.
- Το τετράπλευρο  $AZ\Delta E$  είναι ρόμβος.



12. Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $\Gamma A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο  $\Delta BEZ$  είναι παραλληλόγραμμο.
- Η ευθεία  $\Delta Z$  διχοτομεί το τμήμα  $AE$ .

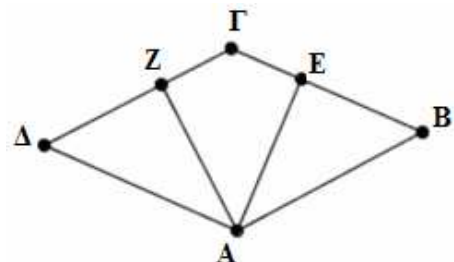
13. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε το  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά τμήμα  $\Delta E = A\Delta$ . Έστω  $K$  το συμμετρικό του  $B$  ως προς το  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $ABK$  είναι ισοσκελές.
- Το τετράπλευρο  $ABEK$  είναι ρόμβος.

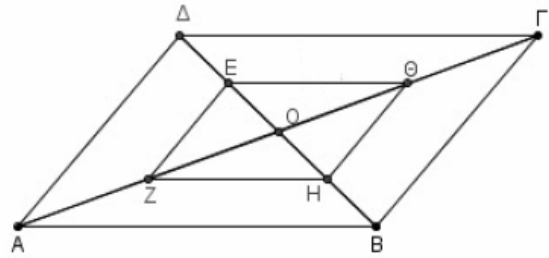
14. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι  $AE \perp B\Gamma$  και  $AZ \perp \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- Αν το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, τότε  $AZ = AE$ .
- Αν για το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  ισχύει  $AZ = AE$ , τότε αυτό είναι ρόμβος.



15. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $O$  είναι το κέντρο του. Έστω  $E, Z, H, \Theta$  τα μέσα των  $OD, OA, OB$  και  $OG$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- α) Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του  $E\Theta HZ$ .



16. Σε κύκλο κέντρου  $O$ , έστω  $OA$  μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της  $OA$  που τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

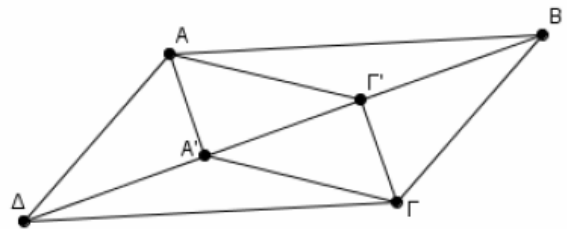
- α) Το τρίγωνο  $OBA$  είναι ισόπλευρο.
- β) Το τετράπλευρο  $OBA\Gamma$  είναι ρόμβος.

17. Σε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ , αν  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α)  $M\Delta = M\Gamma$ .
- β) Η ευθεία  $MN$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $\Gamma\Delta$ .

18. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $A', \Gamma'$  οι προβολές των κορυφών  $A$  και  $\Gamma$  στη διαγώνιο  $B\Delta$ . Αν τα σημεία  $A'$  και  $\Gamma'$  δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

- α)  $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$
- β)  $AA' = \Gamma\Gamma'$
- γ) Το τετράπλευρο  $A\Gamma'\Gamma A'$  είναι παραλληλόγραμμο.

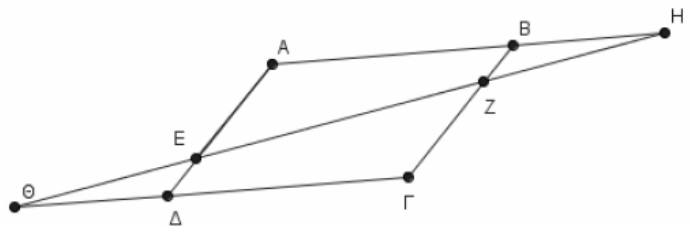


19. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών  $\Delta$  και  $B$  τέμνουν τις πλευρές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

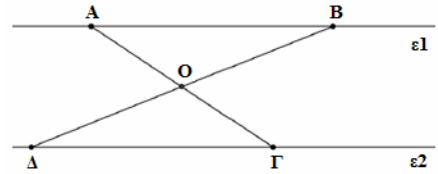
- α) Τα τρίγωνα  $\Delta E\Delta$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα.
- β) Το τετράπλευρο  $\Delta E B Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

20. Στις πλευρές  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημεία  $E$  και  $Z$ , τέτοια ώστε  $AE = \Gamma Z$ . Αν η ευθεία  $ZE$  τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $H$  και  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{HBZ} = \widehat{E\Delta\Theta}$ .
- β)  $\widehat{BZH} = \widehat{\Delta E\Theta}$ .
- γ)  $BH = \Theta\Delta$ .

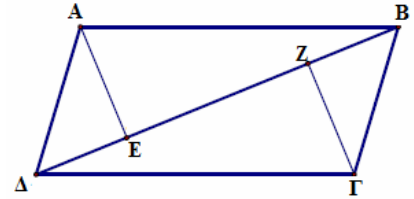


21. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$  και το σημείο  $O$  είναι το μέσο της  $BD$ . Να αποδείξετε ότι:
- τα τρίγωνα  $AOB$  και  $ΓΟΔ$  είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.
  - το  $ABΓΔ$  είναι παραλληλόγραμμο.



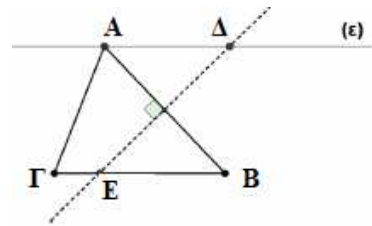
22. Σε παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  ( $AB // ΓΔ$ ) με  $AB > BΓ$  φέρουμε από τις κορυφές  $A$  και  $Γ$  καθέτους στη διαγώνιο  $BD$ , οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $AE = ΓZ$ .
- Το τετράπλευρο  $AEGZ$  είναι παραλληλόγραμμο.



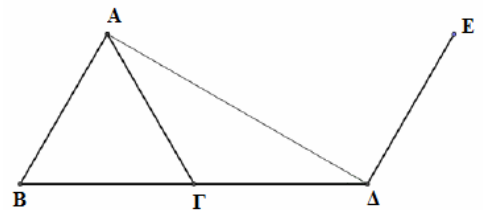
23. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AΓB$ . Φέρουμε από τη κορυφή  $A$  ευθεία ( $\varepsilon$ ) παράλληλη στη  $BΓ$ . Η μεσοκάθετος της πλευράς  $AB$  τέμνει την ( $\varepsilon$ ) στο  $\Delta$  και την  $BΓ$  στο  $E$ .

- Να αποδείξετε ότι  $\Delta A = \Delta B$  και  $EA = EB$ .
- Αν  $M$  το μέσο του  $AB$ , να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $EMB$ .
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta BE$  είναι ρόμβος.



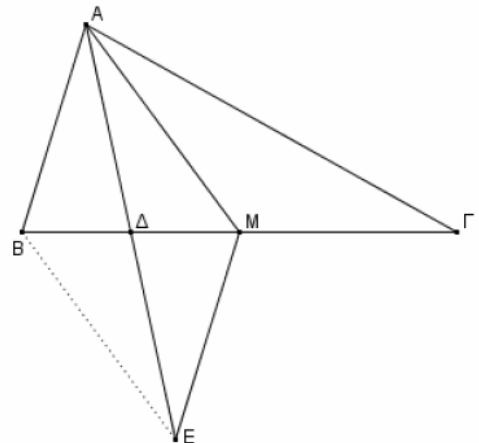
24. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $ABΓ$ . Στην προέκταση της  $BΓ$  (προς το μέρος του  $Γ$ ) θεωρούμε τμήμα  $Γ\Delta = BΓ$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην  $A\Delta$  στο σημείο της  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Delta E = BΓ$ . ( $A$  και  $E$  στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την  $B\Delta$ ).

- Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Delta$ .
- Να αποδείξετε ότι  $AB\Delta E$  παραλληλόγραμμο.

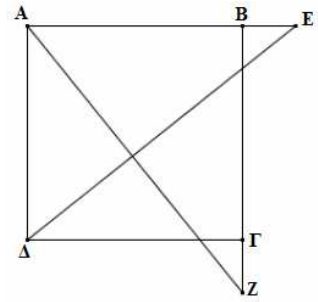


25. Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$  στο οποίο ισχύει  $BΓ = 2AB$  και έστω  $M$  το μέσο της  $BΓ$ . Αν η  $A\Delta$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $ABM$  και  $E$  σημείο στην προέκτασή της ώστε  $A\Delta = \Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:

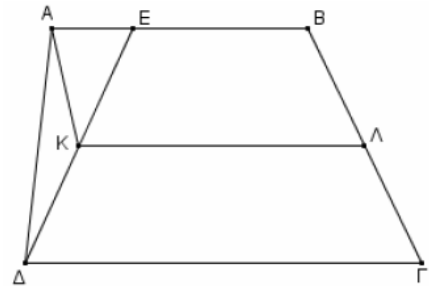
- Το τετράπλευρο  $ABEM$  είναι παραλληλόγραμμο.
- $ME = MΓ$ .



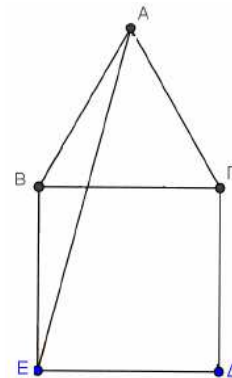
26. Θεωρούμε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και σημεία  $E$  και  $Z$  στις προεκτάσεις των  $AB$  (προς το  $B$ ) και  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) αντίστοιχα, ώστε  $BE = \Gamma Z$ . Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα  $ABZ$  και  $AE\Delta$  είναι ίσα.
  - Οι γωνίες  $E\Delta\Gamma$  και  $AZB$  είναι ίσες.



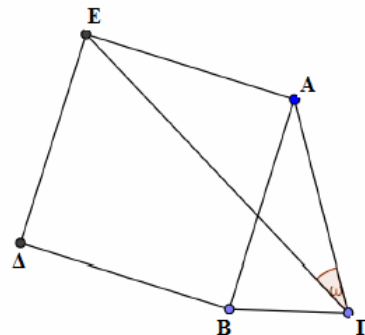
27. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB=3$ ,  $\Gamma\Delta=4$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $AB$  ώστε  $AE=1$ . Στο τραπέζιο  $EB\Gamma\Delta$  θεωρούμε τα  $K$  και  $\Lambda$ , μέσα των  $E\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.
- Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $K\Lambda$  του τραpezίου  $EB\Gamma\Delta$ .
  - Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο.



28. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο  $B\Gamma\Delta E$ .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες:
    - $\widehat{ABE}$
    - $\widehat{BEA}$
  - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AE\Delta$  είναι ισοσκελές.

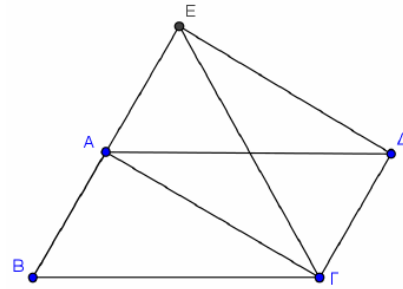


29. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο  $AB\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισοσκελές.
  - $2\widehat{E\Gamma A} = 90^\circ - \widehat{BAG}$



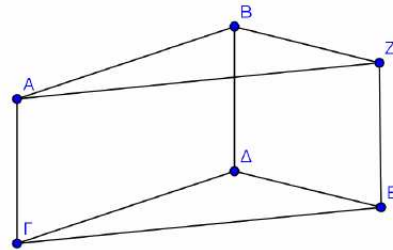
30. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο και το  $A\Gamma\Delta E$  είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το σημείο  $A$  είναι μέσο του  $BE$ .
- β) Το τρίγωνο  $BE\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- γ)  $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Delta E}$ .



31. Δίνονται τα παραλληλόγραμμο  $AB\Delta\Gamma$  και  $B\Delta EZ$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $A\Gamma EZ$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β)  $\widehat{ABZ} = \widehat{\Gamma\Delta E}$ .

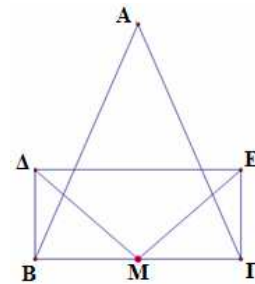


32. Σε κύκλο κέντρου  $O$  φέρουμε τις διαμέτρους του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο.
- β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  ώστε το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

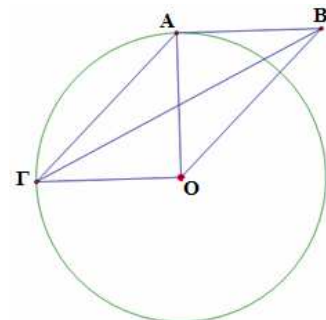
33. Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  φέρουμε κάθετες στη  $B\Gamma$  προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $M\Delta=ME$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα.
- β) Το τετράπλευρο  $B\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

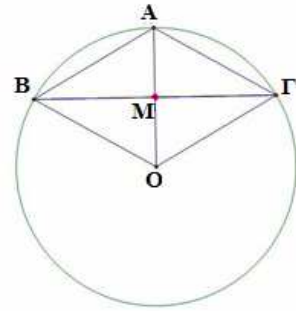


34. Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες  $OA$ ,  $OG$  και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα  $AB$  με  $AB=OG$ .

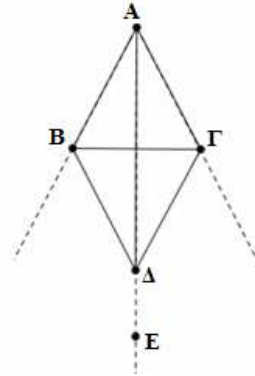
- α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα  $AO$  και  $B\Gamma$  διχοτομούνται.
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $ABO\Gamma$ .



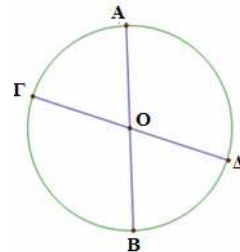
35. Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε την ακτίνα  $OA$  και τη χορδή  $B\Gamma$  κάθετη στην  $OA$  στο μέσο της  $M$ .
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΑΓΟΒ$  είναι ρόμβος.  
 β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $ΑΓΟΒ$ .



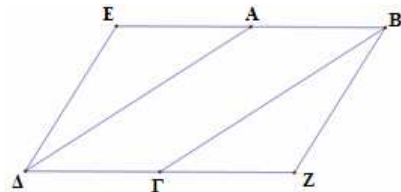
36. Δίνεται ρόμβος  $ΑΒΔΓ$ . Στην προέκταση της διαγωνίου  $ΑΔ$  (προς το  $Δ$ ) παίρνουμε τυχαίο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:
- α) Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών  $ΑΒ$  και  $ΑΓ$  (προς το μέρος των  $B$  και  $Γ$  αντίστοιχα).  
 β) Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τα σημεία  $B$  και  $Γ$ .



37. Σε κύκλο κέντρου  $O$  φέρουμε δυο διαμέτρους του  $ΑΒ$  και  $ΓΔ$ . Να αποδείξετε ότι:
- α) Οι χορδές  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$  του κύκλου είναι ίσες.  
 β) Το τετράπλευρο  $ΑΓΒΔ$  είναι ορθογώνιο.



38. Έστω παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $ΒΑ$  (προς το  $A$ ) και την πλευρά  $ΔΓ$  (προς το  $Γ$ ) κατά τμήματα  $ΑΕ=ΑΒ$  και  $ΓΖ=ΔΓ$ . Να αποδείξετε ότι:
- α)  $BZ = EΔ$   
 β) Το τετράπλευρο  $ΕΒΖΔ$  είναι παραλληλόγραμμο.

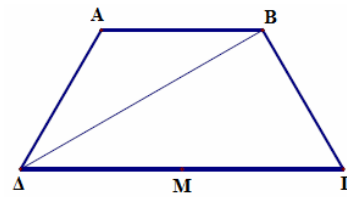


39. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με  $\hat{B} = 60^\circ$ . Φέρουμε τα ύψη  $ΑΕ$  και  $ΒΖ$  του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία  $ΔΓ$ . Να αποδείξετε ότι:
- α)  $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$ .  
 β) το τρίγωνο  $ΑΔΕ$  είναι ίσο με το τρίγωνο  $ΒΓΖ$ ,  
 γ) το τετράπλευρο  $ΑΒΖΕ$  είναι ορθογώνιο.

40. Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε  $AB=AD=\frac{\Gamma\Delta}{2}$ ,  $\hat{\Delta}=60^\circ$  και M το μέσο της

πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α) η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.  
 β) η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.



41. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $AB < AG$  και M το μέσο της BΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα  $M\Delta = MA$ . Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη BΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο ABΔΓ είναι παραλληλόγραμμο,  
 β)  $BM = \frac{AE}{2}$ .

42. Σε μια τάξη της Α' Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές του το παρακάτω πρόβλημα: Δίνεται τρίγωνο ABΓ και μία ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη στην πλευρά BΓ. Στο τρίγωνο ABΓ η εξωτερική γωνία Γ του τριγώνου είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας A.

Ζητείται, χωρίς την βοήθεια γεωμετρικών οργάνων, να χαραχθεί η διάμεσος BM του τριγώνου και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Γ.

Ο καθηγητής για να διευκολύνει τους μαθητές του, έδωσε την εξής υπόδειξη:

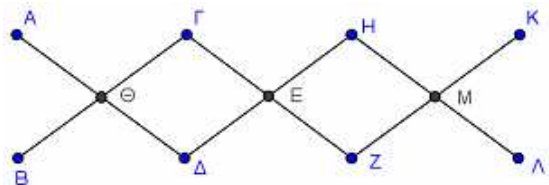
«Αν πάρω στην ευθεία (ε), στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε  $AD=BG$  τότε:

- α) η BΔ τέμνει την AΓ στο μέσο M.  
 β) η ΓΔ είναι η ζητούμενη διχοτόμος.

Μπορείτε να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς αυτούς;

43. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (AΔ, BΓ, ΓZ, ΔH, ZK, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (A, B, Γ, Δ, Θ, E, M, H, K, Λ, Z). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων AΔ και BΓ ενώ το σημείο E είναι μέσο των τμημάτων ΓZ και ΔH, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΓHΖΔ είναι ορθογώνιο.  
 β) Τα σημεία B, Δ, Z είναι συνευθειακά.  
 γ) Το τετράπλευρο AΓZΔ είναι παραλληλόγραμμο.



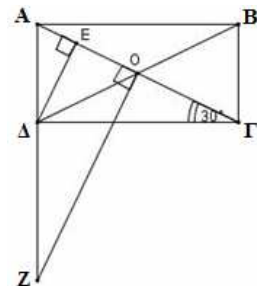


44. Δίνεται ευθεία ( $\epsilon$ ) και δυο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην ( $\epsilon$ ). Φέρουμε AΔ, BΓ κάθετες στην ( $\epsilon$ ) και M, N μέσα των AB και ΓΔ αντίστοιχα.
- α) Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την ( $\epsilon$ )
- i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ABΓΔ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
    - 1)  $AΔ < BΓ$
    - 2)  $AΔ = BΓ$ .
  - ii) να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AΔ, BΓ στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.
- β) Αν η ευθεία ( $\epsilon$ ) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου AΓBΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

45. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :
- α) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.
  - β)  $\widehat{AΕΔ} = \widehat{BΖΓ}$ .
  - γ) Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο AΓ του παραλληλογράμμου ABΓΔ.

46. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι  $\widehat{ΔΓΑ} = 30^\circ$  και O το κέντρο του. Φέρουμε  $ΔE \perp AΓ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία AΔΓ χωρίζεται από το ΔE και τη διαγώνιο ΔB σε τρεις ίσες γωνίες.
- β) Φέρουμε κάθετη στην AΓ στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της AΔ στο Z. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και ABΓ είναι ίσα.



47. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ παραλληλογράμμου ABΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ABΓΔ επιπλέον ισχύει  $AB > AΔ$ , να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:
- Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.
- Ισχυρισμός 2:  $\widehat{AΕΔ} = \widehat{BΖΓ}$ .
- Ισχυρισμός 3: Οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και B.
- α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
  - β) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

48. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει  $AB > AD$ , να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

β) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

49. Έστω  $\epsilon_1, \epsilon_2$  δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν  $M_1$  είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την  $\epsilon_1$  και  $M_2$  το συμμετρικό του  $M_1$  ως προς την  $\epsilon_2$ , να αποδείξετε ότι:

i.  $OM = OM_1$ .

ii. Τα σημεία Μ, Ο και  $M_2$  είναι συνευθειακά.

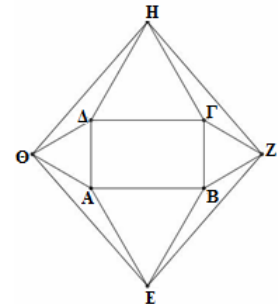
iii. Το τρίγωνο  $MM_1M_2$  είναι ορθογώνιο.

β) Αν  $M_3$  είναι το συμμετρικό σημείο του  $M_2$  ως προς την  $\epsilon_1$ , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το  $MM_1M_2M_3$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

50. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



51. Θεωρούμε ευθεία ( $\epsilon$ ) και δυο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την ( $\epsilon$ ) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην ( $\epsilon$ ). Έστω Α' και Β' τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία ( $\epsilon$ ).

α) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία ( $\epsilon$ ) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α'Β'.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΒ'Α' είναι τραπέζιο.

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και της ευθείας ( $\epsilon$ ) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ'Α' να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

52. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ :

$\Pi_1$ : Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

$\Pi_2$ : Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή.

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

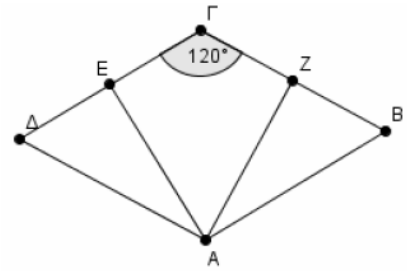
53. Δίνεται ρόμβος  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{\Gamma} = 120^\circ$ . Έστω ότι  $AE$  και  $AZ$  είναι οι αποστάσεις του σημείου  $A$  στις πλευρές  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B$  αντίστοιχα.

ii.  $AG \perp EZ$ .

β) Αν  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $A\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EMNZ$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

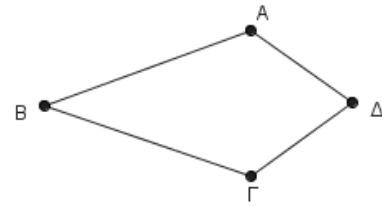


54. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $BA = B\Gamma$  και  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

β) Οι διαγώνιοι του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$  τέμνονται κάθετα.

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο.



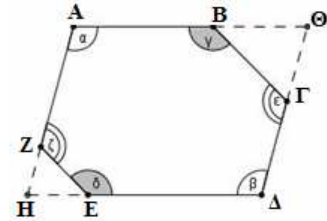
55. Στο κυρτό εξάγωνο  $AB\Gamma\Delta EZ$  ισχύουν τα εξής:  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$  και  $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$ .

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$ .

β) Αν οι πλευρές  $AZ$  και  $\Delta E$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο  $H$  και οι πλευρές  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες  $A$  και  $H$  είναι παραπληρωματικές

ii. Το τετράπλευρο  $A\Theta\Delta H$  είναι παραλληλόγραμμο.

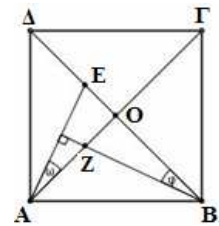


56. Στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  ονομάζουμε  $O$  το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο  $E$  του τμήματος  $OD$ . Φέρνουμε την κάθετη από το  $B$  στην  $AE$ , που τέμνει το τμήμα  $AO$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$  του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

β)  $BZ = AE$  και  $\Gamma Z = BE$

γ) Το τμήμα  $EZ$  είναι κάθετο στο  $AB$ .



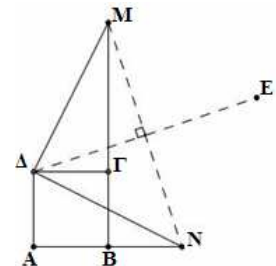
57. Στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  κατά τμήμα  $BN = AB$  και την πλευρά  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma M = AN$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\Delta N = \Delta M$

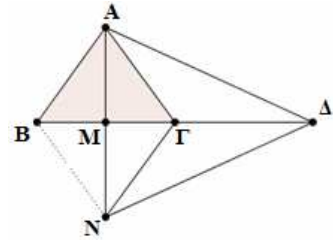
ii.  $\Delta N \perp \Delta M$ .

β) Αν  $E$  το συμμετρικό σημείο του  $\Delta$  ως προς την ευθεία  $MN$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta MEN$  είναι τετράγωνο.

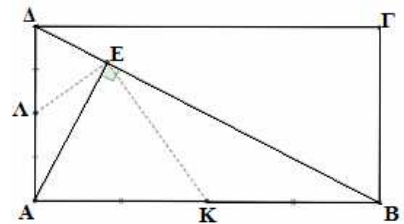


58. Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με γωνία  $A$  αμβλεία, ισχύει ότι  $AB=2A\Delta$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$ , είναι μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Από το  $\Delta$  φέρουμε τη  $\Delta H$  κάθετη στην προέκταση της  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο  $A\epsilon Z\Delta$  είναι ρόμβος.
  - Το τρίγωνο  $EZH$  είναι ισοσκελές.
  - Το τμήμα  $HE$ , είναι διχοτόμος της γωνίας  $ZH\Gamma$ .

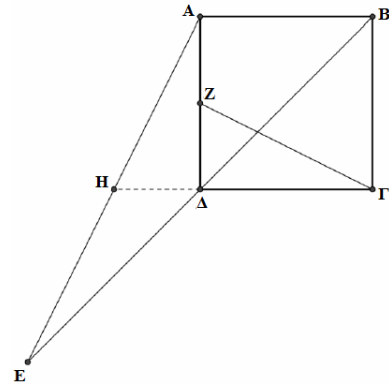
59. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και  $AM$  το ύψος του στην πλευρά  $B\Gamma$ . Στην προέκταση του  $AM$  θεωρούμε τμήμα  $MN=AM$ . Στην προέκταση του  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$  θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta=B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο  $ABN\Gamma$  ρόμβος.
  - Το τρίγωνο  $A\Delta N$  είναι ισοσκελές.
  - Το σημείο  $\Gamma$  είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου  $A\Delta N$ .



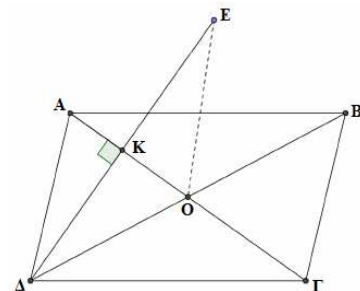
60. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Από την κορυφή  $A$  φέρουμε  $AE\perp B\Delta$ . Έστω  $K, \Lambda$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Delta$  αντίστοιχως, τότε:
- Να αποδείξετε ότι:
    - $\widehat{KE\Lambda}=90^\circ$ .
    - $K\Lambda=\frac{A\Gamma}{2}$
  - Αν  $\widehat{BA\Gamma}=30^\circ$ , να αποδείξετε ότι  $K\Lambda=B\Gamma$ .



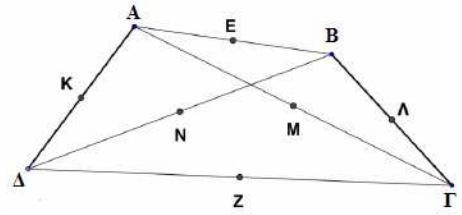
61. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ . Έστω  $E$  το συμμετρικό σημείο του  $B$  ως προς το  $\Delta$  και  $Z$  είναι το μέσο της  $A\Delta$ . Η προέκταση της  $\Gamma\Delta$  τέμνει την  $AE$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:
- $\Delta H=\frac{AB}{2}$ .
  - Τα τρίγωνα  $A\Delta H$  και  $Z\Delta\Gamma$  είναι ίσα.
  - Η  $\Gamma Z$  είναι κάθετη στην  $AE$ .



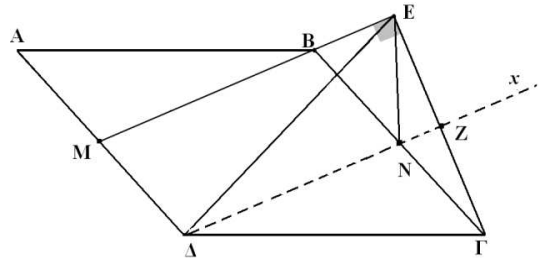
62. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $O$  το κέντρο του. Από την κορυφή  $\Delta$  φέρουμε το τμήμα  $\Delta K$  κάθετο στην  $A\Gamma$  και στην προέκταση του προς το  $K$  θεωρούμε σημείο  $E$ , ώστε  $KE=\Delta K$ . Να αποδείξετε ότι:
- $EO=\frac{B\Delta}{2}$ .
  - Η γωνία  $\Delta EB$  είναι ορθή.
  - Το τετράπλευρο  $AEB\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



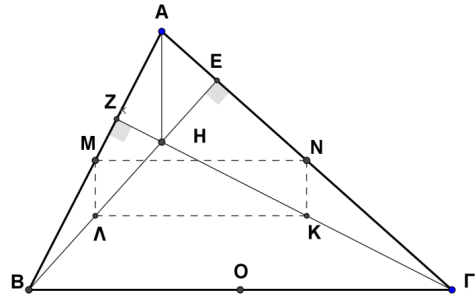
63. Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta=B\Gamma$ . Αν  $E, \Lambda, Z, K, N, M$  είναι τα μέσα των  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο  $EMZN$  ρόμβος.
  - Η  $EZ$  είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος  $MN$ .
  - $KE=Z\Lambda$
  - Τα ευθύγραμμα τμήματα  $K\Lambda, MN, EZ$  διέρχονται από ίδιο σημείο.



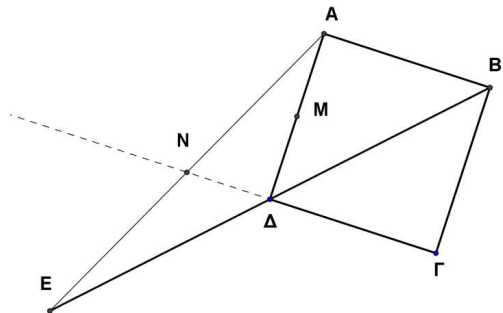
64. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Θεωρούμε το μέσο  $M$  της πλευράς  $A\Delta$  και το  $\Gamma E \perp MB$ . Η παράλληλη από την κορυφή  $\Delta$  στην ευθεία  $MB$  ( $\Delta x // MB$ ) τέμνει τις  $B\Gamma$  και  $\Gamma E$  στα σημεία  $N, Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο  $MBN\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.
  - Το σημείο  $Z$  είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $\Gamma E$ .
  - $\Delta E = \Delta \Gamma$ .



65. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $BE \perp \Gamma Z$ , τα ύψη από τις κορυφές  $B, \Gamma$  αντίστοιχα και  $H$  το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα  $M, N, K, \Lambda$  μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων  $AB, A\Gamma, \Gamma H, BH$  αντίστοιχα.
- Να αποδείξετε ότι:
    - $MN = \Lambda K$
    - $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$ .
    - Το τετράπλευρο  $MNKL$  είναι ορθογώνιο.
  - Αν το  $O$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $\widehat{MOK} = 90^\circ$ .



66. Σε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  προεκτείνουμε τη διαγώνιο  $B\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta E = \Delta B$ . Έστω  $M$  το μέσο της  $A\Delta$  και  $N$  το σημείο τομής των  $A\Gamma$  και  $E\Delta$ .
- Να αποδείξετε ότι  $\Delta N = \Delta M$ .
  - Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $NMA$ .
  - Να αποδείξετε ότι:
    - $MN \perp A\Gamma$ .
    - $\Gamma M \perp \Lambda N$

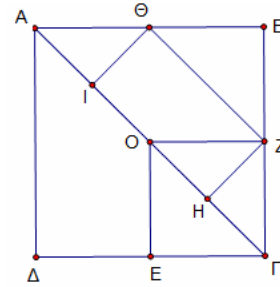


67. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε ΑΙ=ΙΟ=ΟΗ=ΗΓ. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

β)  $ZH = \frac{AG}{4}$ .

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με  $\Theta Z = 2\Theta I$ .



68. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Έστω Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

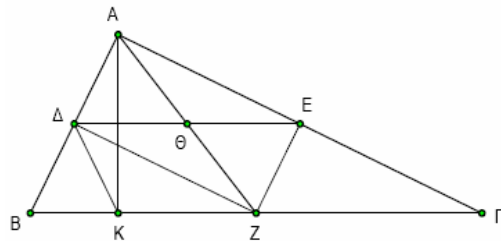
i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

ii.  $A\Theta = \Theta E = \frac{BG}{4}$ .

γ) Αν επιπλέον είναι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ :

i. να βρείτε τη γωνία ΑΖΒ.

ii. να αποδείξετε ότι  $BK = \frac{BG}{4}$ .

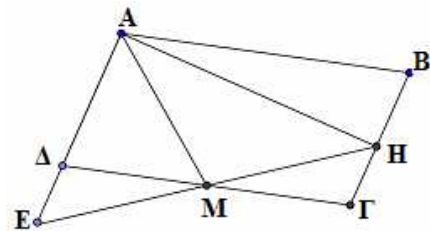


69. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με  $AB = 2BG$ , τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ)  $\hat{E} = \widehat{\Delta M A}$ .

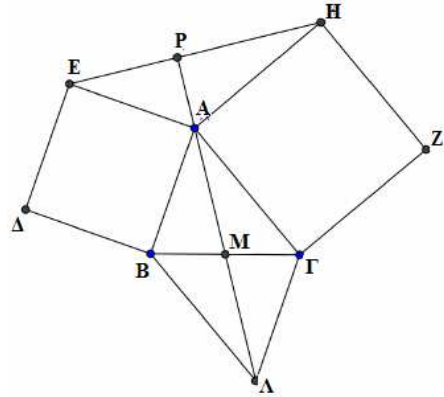


70. α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

71. Εκτός τριγώνου  $AB\Gamma$  κατασκευάζουμε τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma ZH$ . Αν  $M$  το μέσο του  $B\Gamma$  και  $\Lambda$  σημείο στην προέκταση της  $AM$  τέτοιο ώστε  $AM=M\Lambda$ , να αποδείξετε ότι:

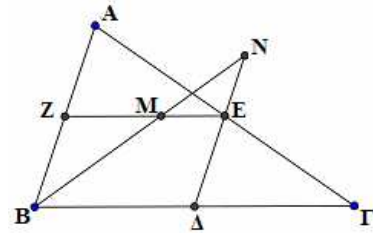
- α)  $\Gamma\Lambda=AE$ .
- β) Οι γωνίες  $A\Gamma\Lambda$  και  $E\Lambda H$  είναι ίσες.
- γ) Η προέκταση της  $MA$  (προς το  $A$ ) τέμνει κάθετα την  $EH$ .



72. α) Σε ρόμβο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda M N$  είναι ορθογώνιο.  
β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

73. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A\Gamma > AB$  και  $\Delta, E, Z$  τα μέσα των πλευρών του  $B\Gamma, A\Gamma, AB$  αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας  $B$  τέμνει την  $ZE$  στο σημείο  $M$  και την προέκταση της  $\Delta E$  στο σημείο  $N$ , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $Z\epsilon\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Τα τρίγωνα  $BZM$  και  $M\epsilon N$  είναι ισοσκελή.
- γ)  $BZ + NE = \Delta\Gamma$ .



74. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και στην προέκταση της  $A\Delta$  θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Delta E = \Delta\Gamma$ , ενώ στην προέκταση της  $AB$  θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $BZ = B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

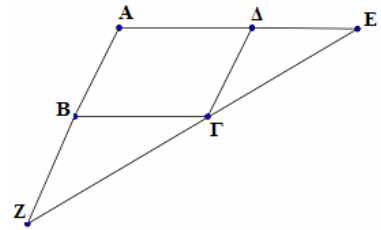
- i.  $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ .
- ii. τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά.

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό:

« Έχουμε  $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$  (ως εντός εκτός και επί τα αυτά

μέρη των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από τη  $Z\epsilon$ ) και  $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E}$  (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από την  $\Delta\Gamma$ ).

Όμως  $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{\Gamma\Delta E} + \widehat{\Delta\epsilon\Gamma} = 180^\circ$  (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $\Delta\epsilon\Gamma$ ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα  $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{B\Gamma Z} = 180^\circ$ . Οπότε τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά. Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.





75. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και από το μέσο  $M$  του  $B\Gamma$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο με το  $BA$  και ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο με το  $\Gamma A$  (τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη  $B\Gamma$  και το σημείο  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία  $\Delta, A, E$  είναι συνευθειακά.

β) Η περίμετρος του τριγώνου  $M\Delta E$  είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε το ερώτημα αν τα σημεία  $\Delta, A, E$  είναι συνευθειακά στους μαθητές του, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε

ως εξής:  $\widehat{AZ\Delta} = \widehat{ZAB}$  (εντός εναλλάξ των  $AB//M\Delta$  που τέμνονται από  $AZ$ ).

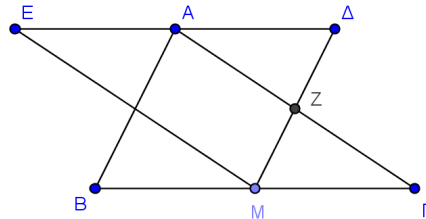
$\widehat{A\Delta Z} = \widehat{EAB}$  (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των  $AB//M\Delta$  που τέμνονται από  $\Delta E$ )

Όμως (άθροισμα γωνιών του τριγώνου  $A\Delta Z$ ).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα

έχουμε:  $\widehat{EAB} + \widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Delta A Z} = 180^\circ$ . Οπότε  $\Delta, E, A$  συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

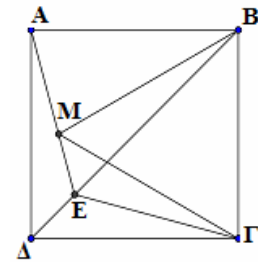


76. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο  $MB\Gamma$ . Αν η προέκταση της  $AM$  τέμνει την  $B\Delta$  στο σημείο  $E$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{\Delta AE} = 15^\circ$ .

β) Τα τρίγωνα  $\Delta AE$  και  $\Delta E\Gamma$  είναι ίσα.

γ) Η  $\Gamma E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta\Gamma M$ .



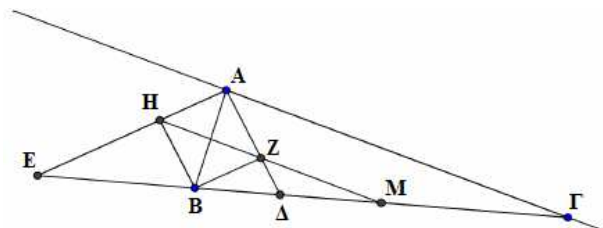
77. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A\Delta$  και  $A E$  αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας  $A$  ( $\Delta, E$  σημεία της ευθείας  $B\Gamma$ ). Φέρουμε  $BZ$  κάθετη στην  $A\Delta$  και  $BH$  κάθετη στην  $A E$  και θεωρούμε  $M$  το μέσο του  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $AZBH$  είναι ορθογώνιο.

β) Η γωνία  $HZA$  είναι ίση με τη γωνία  $ZA\Gamma$ .

γ) Η ευθεία  $HZ$  διέρχεται από το  $M$ .

δ)  $MH = \frac{AB + A\Gamma}{2}$ .

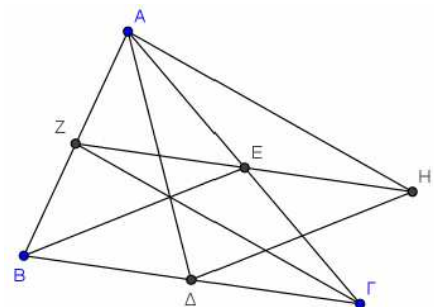


78. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και οι διάμεσοι του  $A\Delta, BE$  και  $\Gamma Z$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $ZE$  (προς το  $E$ ) κατά τμήμα  $EH = ZE$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $EH\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο.

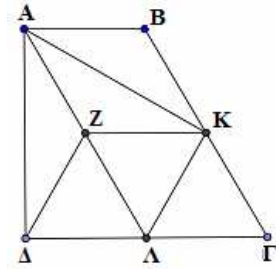
β) Η περίμετρος του τριγώνου  $A\Delta H$  είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

γ) Οι ευθείες  $BE$  και  $\Delta H$  τριχοτομούν το τμήμα  $Z\Gamma$ .

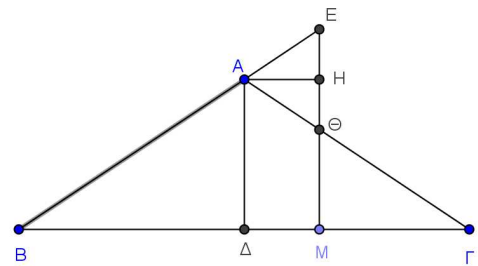




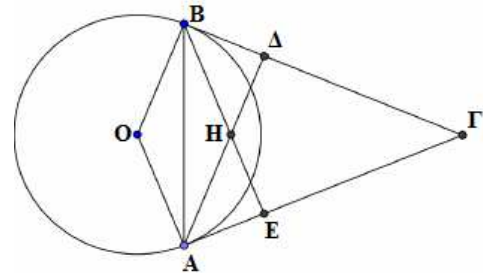
79. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$  και  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$ . Η παράλληλη από το  $K$  προς την  $AB$  τέμνει την  $AL$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:
- $B\Gamma = 2\Delta Z$ .
  - Το τετράπλευρο  $ZK\Gamma\Lambda$  είναι ρόμβος.
  - $\widehat{AK\Lambda} = 90^\circ$ .



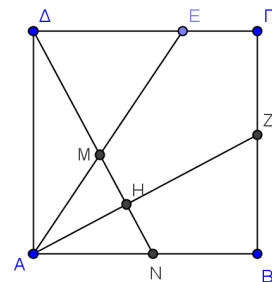
80. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), και τυχαίο σημείο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Από το σημείο  $M$  φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά  $B\Gamma$  που τέμνει τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $\Theta$  αντίστοιχα. Αν  $A\Delta$  και  $AH$  τα ύψη των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Theta E$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- $\widehat{\Delta A H} = 90^\circ$ .
  - Το τρίγωνο  $A\Theta E$  είναι ισοσκελές.
  - $M\Theta + ME = 2A\Delta$ .



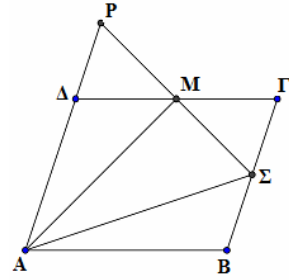
81. Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του  $A$  και  $B$ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία  $A$  και  $B$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Gamma$ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη  $A\Delta$  και  $BE$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τα οποία τέμνονται στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο  $BHA$  είναι ισοσκελές.
  - Το τετράπλευρο  $OBHA$  είναι ρόμβος.
  - Τα σημεία  $O, H, \Gamma$  είναι συνευθειακά.



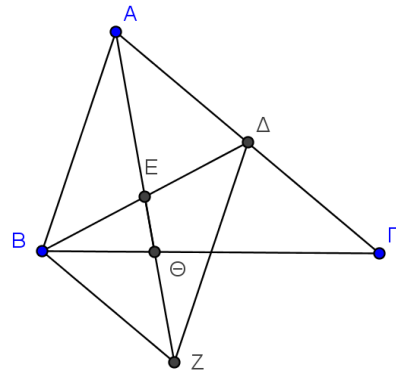
82. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και τυχαίο σημείο  $E$  στην πλευρά  $\Delta\Gamma$ . Φέρουμε τη διχοτόμο  $AZ$  της γωνίας  $EAB$  και την  $\Delta H$  κάθετη από το  $\Delta$  προς την  $AZ$ , η οποία τέμνει την  $AE$  στο  $M$  και την  $AB$  στο  $N$ . Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα  $A\Delta N$  και  $ABZ$  είναι ίσα.
  - $AM = AN$  και  $\Delta E = EM$ .
  - $AZ = \Delta E + BZ$ .



83. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΜ στο σημείο Μ, η οποία τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ρ και την ΒΓ στο Σ. Να αποδείξετε ότι:
- $\Delta P = \Sigma \Gamma$ .
  - Το τρίγωνο ΑΡΣ είναι ισοσκελές.
  - $A\Sigma = A\Delta + \Gamma\Sigma$ .

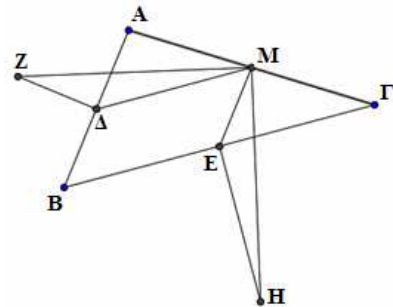


84. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε  $EZ = AE$ . Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
  - Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
  - Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ.



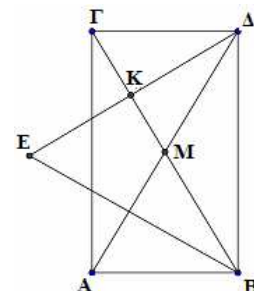
85. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες Β και Γ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\Delta Z = \frac{AB}{2}$  και  $EH = \frac{B\Gamma}{2}$ .

- Να αποδείξετε ότι:
  - Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο.
  - Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.
- Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι  $A = 90^\circ$ .



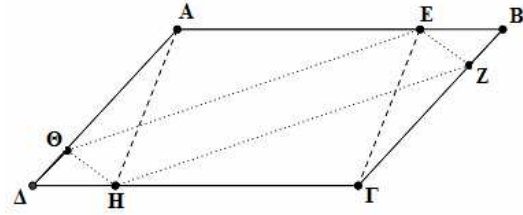
86. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ). Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του Μ) κατά τμήμα  $M\Delta = AM$ . Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.
- $\widehat{KEB} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ .
- $\Delta E = B\Delta$ .



87. Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημεία  $E, Z, H, \Theta$  στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα, με  $AE = \Gamma H$  και  $BZ = \Delta\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $AE\Gamma H$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Τα τμήματα  $A\Gamma, B\Delta, EH$  και  $Z\Theta$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.

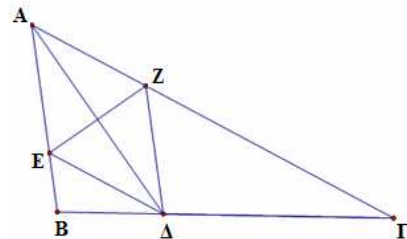


88. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και σημεία  $K, \Lambda$  της διαγωνίου του  $B\Delta$ , τέτοια ώστε να ισχύει  $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AK\Gamma\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, τότε και το  $AK\Gamma\Lambda$  είναι ρόμβος.
- γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου  $AN\Gamma\Delta$ , ώστε το  $AK\Gamma\Lambda$  να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

89. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ , για την οποία ισχύει  $A\Delta = \Delta\Gamma$ . Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A\Delta B$  και η  $\Delta Z$  παράλληλη στην  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα  $E\Delta$  και  $A\Gamma$  είναι παράλληλα.
- β) Το τρίγωνο  $E\Delta\Delta$  είναι ισοσκελές.
- γ) Τα τμήματα  $A\Delta$  και  $EZ$  διχοτομούνται.

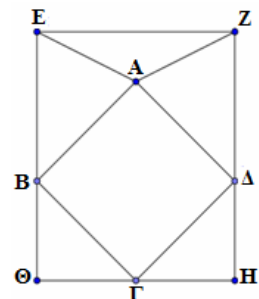


90. Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο  $EZH\Theta$  παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο  $A$  το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της  $\Theta H$  και απέχει από αυτή απόσταση ίση με  $\Theta H$ . Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$  χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου  $E\Theta, \Theta H, ZH$  διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία  $ABE$ ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ. η γωνία  $\Theta B\Gamma$ ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι  $45^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

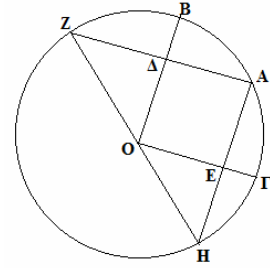
- i. Η διαδρομή  $AB\Gamma\Delta$  της μπάλας είναι τετράγωνο.
- ii. Το σημείο  $A$  ισαπέχει από τα τις κορυφές  $E$  και  $Z$  του μπιλιάρδου.

β) Αν η  $AZ$  είναι διπλάσια από την απόσταση του  $A$  από τον τοίχο  $EZ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AEZ$ .



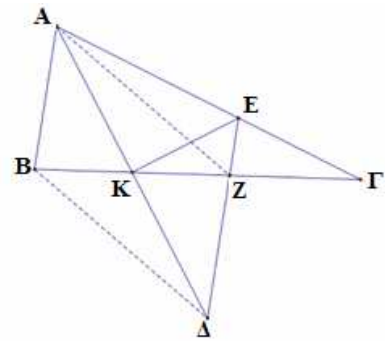
91. Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και δυο κάθετες ακτίνες του  $OB$  και  $OG$ . Έστω  $A$  το μέσον του τόξου  $BΓ$ . Από το  $A$  φέρω κάθετες στις ακτίνες  $OB$  και  $OG$  που τις τέμνουν στα  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των  $A\Delta$  και  $AE$  τέμνουν τον κύκλο στα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $AZ=AH$ .
- β) Το  $\Delta O E$  είναι ορθογώνιο.
- γ) Τα σημεία  $H$  και  $Z$  είναι αντιδιαμετρικά.
- δ) Το τετράπλευρο  $BΓ H Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



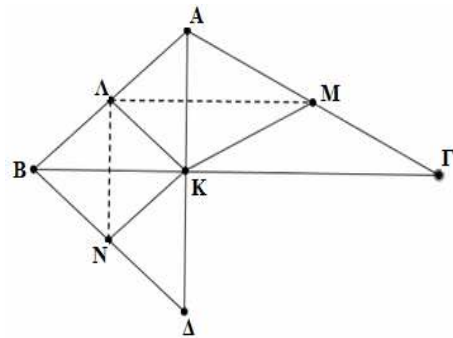
92. Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$ , με  $AK$  διχοτόμο της γωνίας  $A$ . Στην προέκταση της  $AK$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AK=K\Delta$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει τις  $AG$  και  $BΓ$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $AE\Delta$  είναι ισοσκελές.
- β) Η  $EK$  είναι μεσοκάθετος της  $A\Delta$ .
- γ) Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $K\Delta Z$  είναι ίσα.
- δ) Το τετράπλευρο  $AZ\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο.



93. Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$ . Στην προέκταση του ύψους του  $AK$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AK=K\Delta$ . Έστω  $\Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών  $AB, AG$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

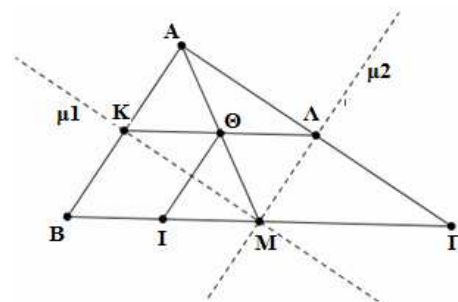
- α) Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές.
- β) Το τετράπλευρο  $B\Lambda K N$  είναι ρόμβος.
- γ)  $\Lambda M \perp \Lambda N$ .



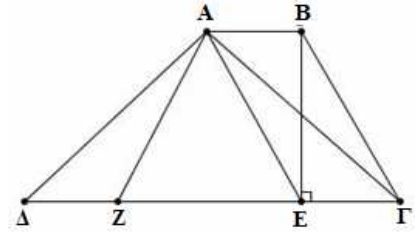
94. Θεωρούμε τρίγωνο  $ABΓ$  και τις μεσοκαθέτους  $\mu_1, \mu_2$  των πλευρών του  $AB$  και  $AG$ , οι οποίες τέμνονται στο μέσο  $M$  της  $BΓ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι:
  - i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $A=90^\circ$ .
  - ii. Το τετράπλευρο  $A\Lambda M K$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
  - iii.  $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $AM$  και  $K\Lambda$ .

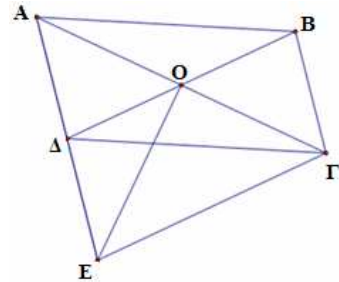
- β) Αν  $I$  σημείο της  $BΓ$  τέτοιο ώστε  $BI = \frac{B\Gamma}{4}$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Theta IB$  είναι παραλληλόγραμμο.



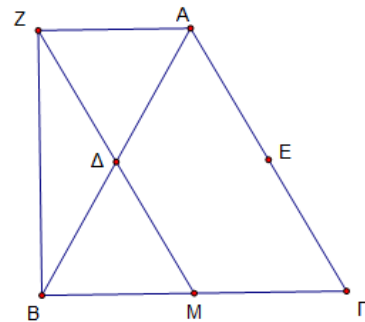
95. Δίνεται τραπέζιο  $ABΓΔ$  με  $AB//ΓΔ$ ,  $ΔΓ=4AB$  και  $ΒΓ=2AB$ . Θεωρούμε σημείο  $Z$  της  $ΓΔ$ , ώστε  $ΔZ=AB$ . Αν η γωνία  $Γ$  είναι  $60^\circ$  και  $BE$  το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο  $ABΓE$  είναι παραλληλόγραμμο.
  - Το τρίγωνο  $ZAE$  είναι ισόπλευρο.
  - Τα τρίγωνα  $ΔAZ$  και  $ΓAE$  είναι ίσα.



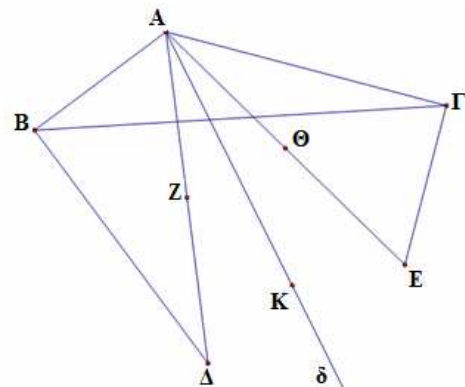
96. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην  $ΑΓ$  στο κέντρο του  $O$ , αυτή τέμνει την προέκταση της  $ΑΔ$  σε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $ΔE=ΔΑ$ . Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο  $ΑΕΓ$  είναι ισοσκελές.
  - Το τετράπλευρο  $ΒΓΕΔ$  είναι παραλληλόγραμμο.
  - Το τρίγωνο  $ΒΟΓ$  είναι ισοσκελές.



97. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $ABΓ$  και τα μέσα  $Δ$ ,  $E$  και  $M$  των  $AB$ ,  $ΑΓ$  και  $ΒΓ$  αντίστοιχα. Στην προέκταση του  $MΔ$  (προς το  $Δ$ ) θεωρούμε τμήμα  $ΔZ=ΔM$ . Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα  $AZΔ$  και  $BMΔ$  είναι ίσα.
  - Το τετράπλευρο  $ZΑΓM$  είναι παραλληλόγραμμο.
  - Τα τμήματα  $ZE$  και  $ΑΔ$  τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
  - Η  $BZ$  είναι κάθετη στη  $ZA$ .

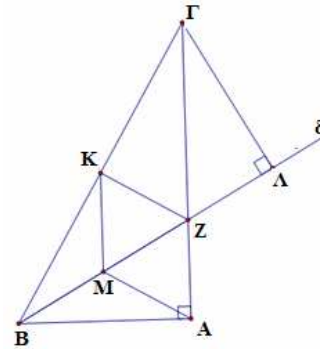


98. Δίνεται τρίγωνο με  $AB < ΑΓ$ . Φέρνουμε τμήμα  $BΔ$  κάθετο στην  $AB$  με  $BΔ=ΑΓ$  και τμήμα  $ΓE$  κάθετο στην  $ΑΓ$  με  $ΓE=AB$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $Θ$  των  $ΑΔ$  και  $ΑE$  καθώς και τη διχοτόμο  $Αδ$  της γωνίας  $ΔΑΕ$ .
- Να αποδείξετε ότι  $ΑΔ=ΑE$ .
  - Αν  $K$  τυχαίο σημείο της διχοτόμου  $Αδ$ , να αποδείξετε ότι το  $K$  ισαπέχει από τα μέσα  $Z$  και  $Θ$ .
  - Αν το  $K$  είναι σημείο της διχοτόμου  $Αδ$  τέτοιο ώστε  $KZ=AZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZKΘ$  είναι ρόμβος.



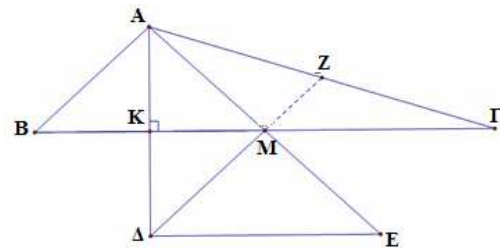
99. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{B}=60^\circ$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $B$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Τα σημεία  $M$  και  $K$  είναι τα μέσα των  $BZ$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Αν το τμήμα  $\Gamma\Lambda$  είναι κάθετο στη διχοτόμο  $B\delta$  να αποδείξετε:

- α) Το τρίγωνο  $BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β) Το τετράπλευρο  $AMKZ$  είναι ρόμβος.
- γ)  $\Gamma Z=2ZA$ .
- δ)  $B\Lambda=A\Gamma$ .



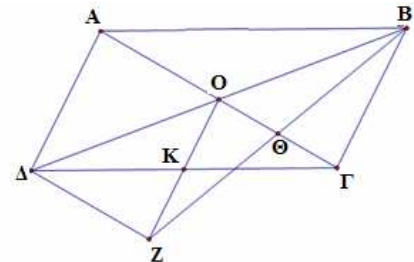
100. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με διάμεσο  $AM$  τέτοια ώστε  $AM=AB$ . Φέρουμε το ύψος  $AK$  και το προεκτείνουμε (προς το  $K$ ) κατά τμήμα  $K\Delta=AK$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  (προς το  $M$ ) κατά τμήμα  $ME=AM$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta E \perp A\Delta$  και  $\Delta E=2KM$ .
- β) Το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Το τετράπλευρο  $AB\Delta M$  είναι ρόμβος.
- δ) Η προέκταση της  $\Delta M$  τέμνει το  $A\Gamma$  στο μέσον του  $Z$ .



101. Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του και  $K$  το μέσο του  $\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $OK$  κατά τμήμα  $KZ=KO$ . Η  $BZ$  τέμνει τη διαγώνιο  $A\Gamma$  στο  $\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα  $O\Gamma$  και  $BZ$  διχοτομούνται.
- β)  $AO=\Delta Z$ .
- γ) Τα τρίγωνα  $AOB$  και  $\Delta Z\Gamma$  είναι ίσα.

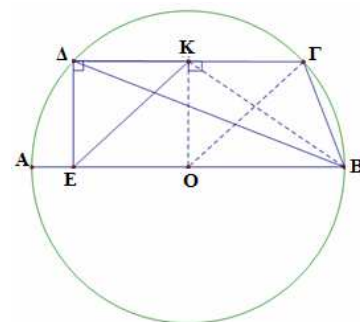


102. Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και διάμετρο  $AB$ . Φέρνουμε χορδή  $\Gamma\Delta // AB$  με  $K$  το μέσο της. Από το  $\Delta$  φέρνουμε το τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στη  $\Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $K\Gamma O E$  είναι παραλληλόγραμμο.

β)  $\widehat{\Delta E K} = \frac{\widehat{\Delta O \Gamma}}{2}$ .

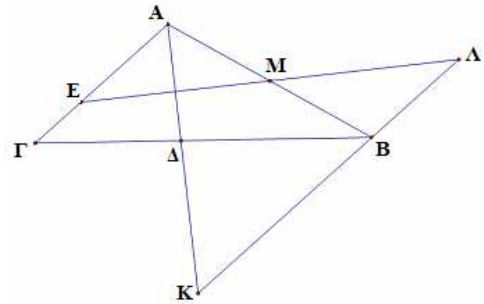
γ)  $KE < KB$ .



**103.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$  και  $M$  το μέσον της  $AB$ . Η κάθετη από το  $M$  στην  $A\Delta$  τέμνει το  $A\Gamma$  στο  $E$ . Η παράλληλη από το  $B$  στο  $A\Gamma$  τέμνει την προέκταση της  $A\Delta$  στο  $K$  και την προέκταση της  $EM$  στο  $\Lambda$ . Να αποδείξετε ότι:

**α)** Τα τρίγωνα  $AEM$ ,  $MB\Lambda$  και  $ABK$  είναι ισοσκελή.

**β)** Το τετράπλευρο  $A\Lambda BE$  είναι παραλληλόγραμμο.



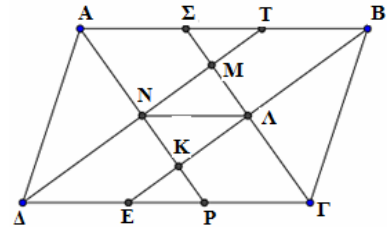
**104.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > A\Delta$  και οι διχοτόμοι των γωνιών του  $AP$ ,  $BE$ ,  $\Gamma\Sigma$  και  $\Delta T$  (όπου  $P$ ,  $E$  στην  $\Delta\Gamma$  και  $\Sigma$ ,  $T$  στην  $AB$ ) τέμνονται στα σημεία  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$  και  $N$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

**α)** το τετράπλευρο  $\Delta EBT$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β)** το τετράπλευρο  $K\Lambda MN$  είναι ορθογώνιο.

**γ)**  $\Lambda N \parallel AB$ .

**δ)**  $\Lambda N = AB - A\Delta$ .



**105.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσος του  $A\Delta$ . Έστω  $E$ ,  $Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των  $B\Delta$ ,  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EZH$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β)** Να βρείτε τη σχέση των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , ώστε το παραλληλόγραμμο  $\Delta EZH$  να είναι ρόμβος.

**γ)** Στην περίπτωση που το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο (η γωνία  $B$  ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου  $\Delta EZH$ .

