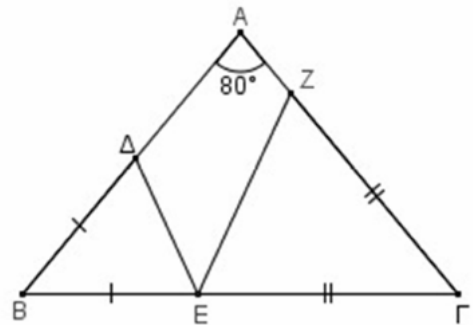


1. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ είναι $\hat{A}=80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο E στην πλευρά $B\Gamma$ και κατόπιν τα σημεία Δ και Z στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta=BE$ και $GE=GZ$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $B\Delta E$ και GZE .
β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔEZ .



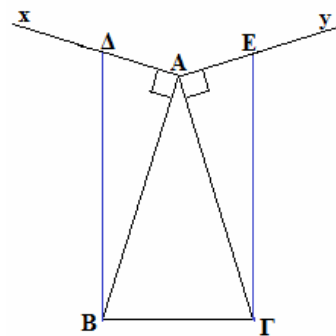
2. Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία xOy . Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία A είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας B .

- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$.
β) Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AG στο εσωτερικό της σημείο Δ . Αν η γωνία $A\Delta B$ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

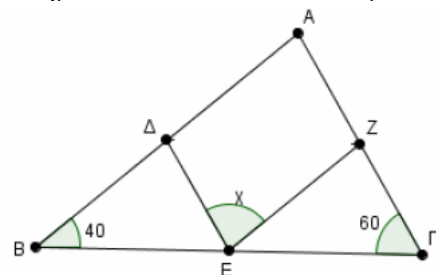
4. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=GE$.
β) Αν η γωνία $BA\Gamma$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE .

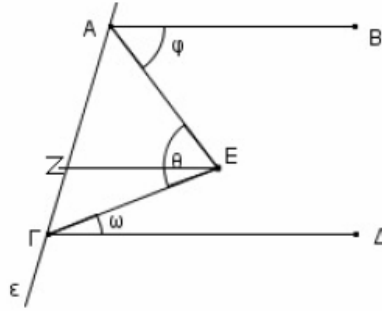
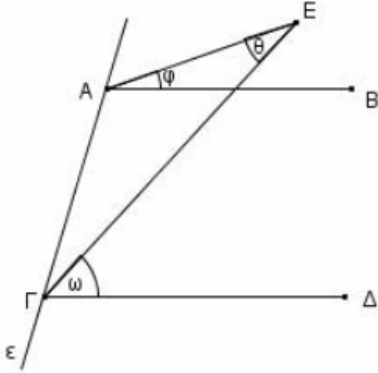


5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B}=40^\circ$ και $\hat{\Gamma}=60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

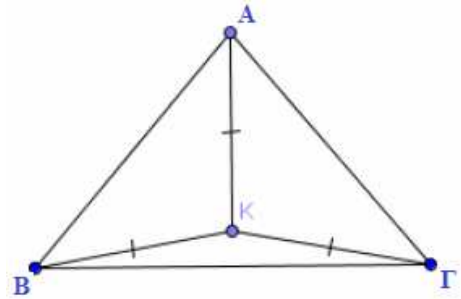
- α) Να υπολογίσετε τη γωνία \hat{A} του τριγώνου $AB\Gamma$.
β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\Delta E} = \widehat{E Z \Gamma} = 80^\circ$.
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta E Z}$.



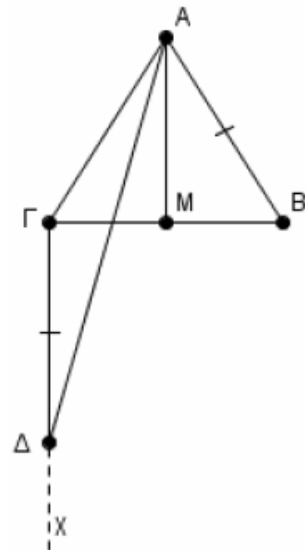
6. Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ . Να αποδείξετε ότι:
- α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε $\hat{\omega} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$.
- β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\phi} + \hat{\omega}$.



7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{A}=80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας \hat{A} , τέτοιο ώστε $KB=KA=K\Gamma$.
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες \widehat{ABK} και \widehat{AGK} .
- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$.

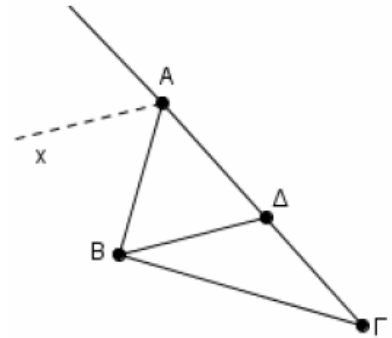


8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma\chi \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta=AB$. Να αποδείξετε ότι:
- α) Η γωνία $\Delta A\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\Delta A$.
- β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAG .



9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $A_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.
 - ii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$.
- β) Αν η γωνία $B\Delta A$ είναι διπλάσια της γωνίας Γ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.

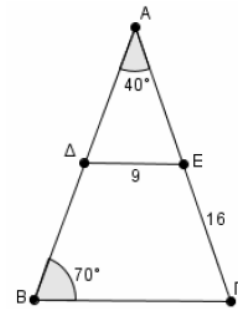


10. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι ίσα.
 β) $E\Delta // B\Gamma$.

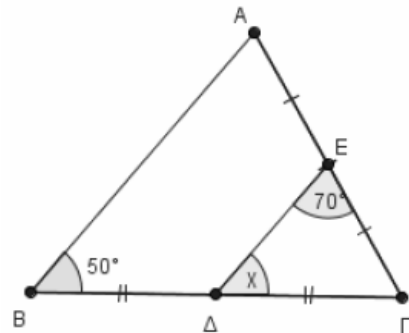
11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και ϵ είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta\epsilon = 9$ και $\epsilon\Gamma = 16$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.
 β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.
 γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



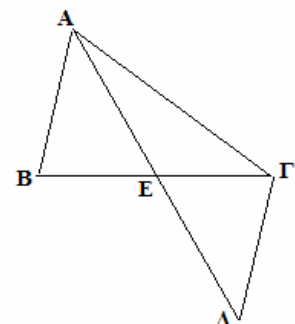
12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και ϵ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\widehat{\Delta\epsilon\Gamma} = 70^\circ$.

- α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta\epsilon // AB$.
 β) Να υπολογίσετε:
 i. τη γωνία \hat{x} .
 ii. τις γωνίες A και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.



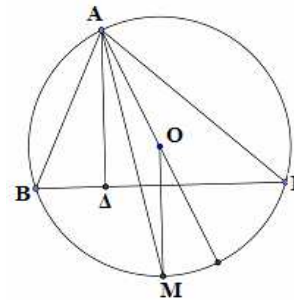
13. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και ϵ και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό ϵ ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .

- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ .
 - ii. αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

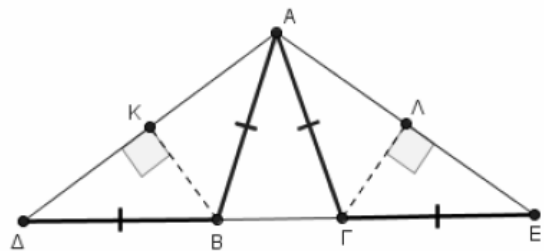


- iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ.
 β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
 α) ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΟ.
 β) $\widehat{OAG} = \widehat{DAB}$.
 γ) $\widehat{DAO} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

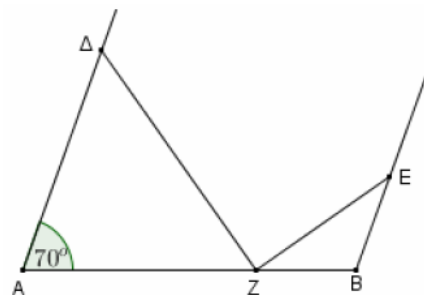


15. Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν $AB = BD = AG = GE = 5$, $BK \perp AD$ και $GL \perp AE$.
 α) Να προσδιορίσετε, ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.
 γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.



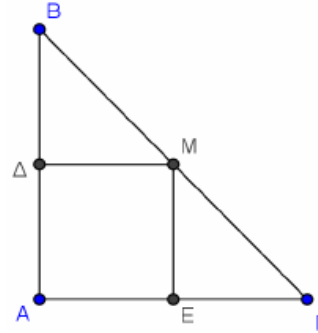
16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.
 α) Να υπολογίσετε τις γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$.
 β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες \widehat{ADE} , \widehat{EDG} .

17. Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $AD = AZ$, $BE = BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.
 α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ.
 β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{DZE} = 90^\circ$.



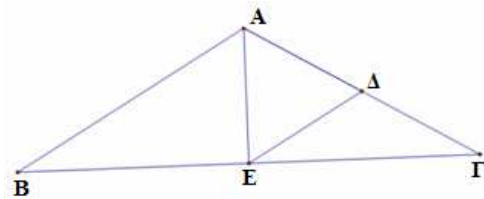
18. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν $M\Delta = ME$ τότε:
 i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.
 ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.



19. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$, και γωνία $\hat{B}=30^\circ$. Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

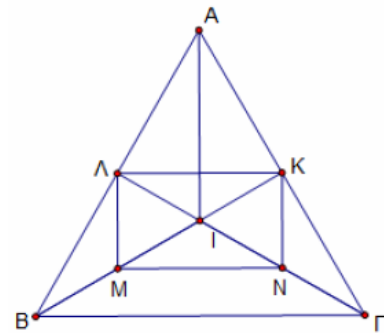


20. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
 β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$.
 γ) Αν η γωνία \hat{B} είναι 20° μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{E\Gamma\Delta}$.

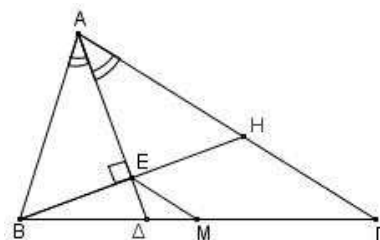
21. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I . Αν M και N τα μέσα των BI και ΓI αντίστοιχα, να αποδείξετε:

- α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.
 β) Τα τρίγωνα $B\Gamma I$ και $\Gamma\Gamma I$ είναι ίσα.
 γ) Το $A\Gamma$ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.
 δ) Το τετράπλευρο $M\Lambda K N$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$. Φέρουμε από το B κάθετη στην $A\Delta$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

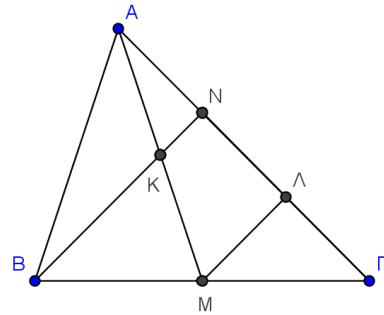
- α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.
 β) $EM \parallel H\Gamma$
 γ) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.



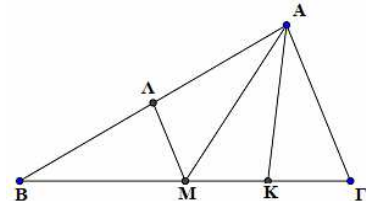
23. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.
 β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για:
 i. ισόπλευρο τρίγωνο.
 ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

24. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
 α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E // B\Gamma$.
 β) Στην περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

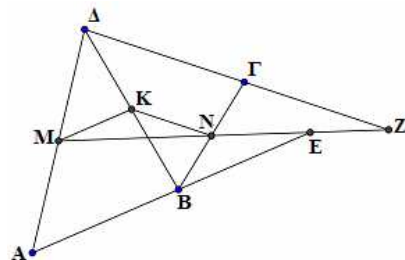
25. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσος του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N , και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:
 α) Το σημείο N είναι μέσο του $A\Lambda$.
 β) $\widehat{KM\Gamma} = \widehat{MBK} + \widehat{AKN}$.
 γ) $BK = 3KN$.



26. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
 α) $\widehat{MA\Gamma} = \widehat{AM\Gamma}$.
 β) $M\Lambda = MK$.
 γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΛAK .

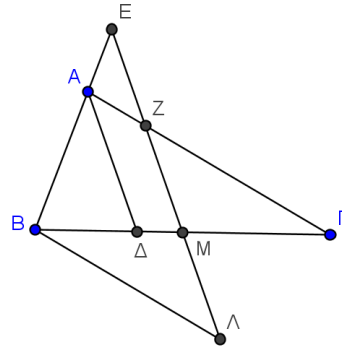


27. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:
 α) $MK = KN$.
 β) $\widehat{ME\Lambda} = \widehat{MZ\Delta}$.



28. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία (ϵ) παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία (ϵ) στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

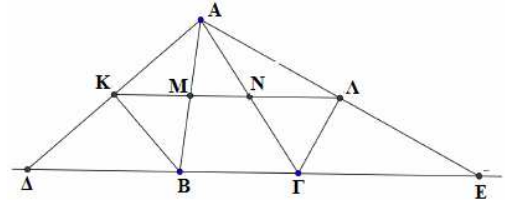
- α) Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή.
 β) $B\Lambda = \Gamma Z$.
 γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$.



29. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma A$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

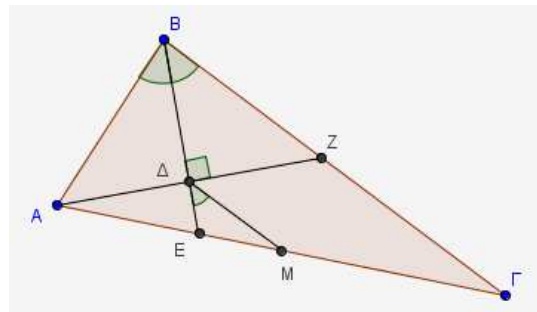
- α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.
 β) Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή.

γ) $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$.



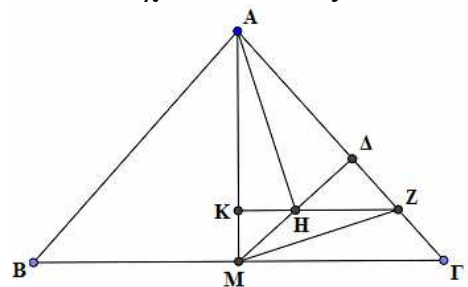
30. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος BE της γωνίας B . Αν $AZ \perp BE$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και M το μέσον της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

- α) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.
 β) $\Delta M // B\Gamma$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma - AB}{2}$.
 γ) $\widehat{E\Delta M} = \frac{\widehat{B}}{2}$, όπου B είναι η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

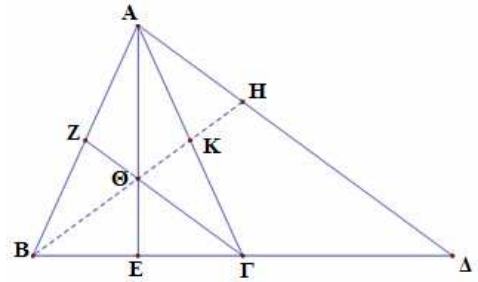


31. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$.
 β) $MZ // B\Delta$.
 γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.



32. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου που τέμνονται στο Θ . Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H . Να αποδείξετε ότι:
- α) Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - β) $AH=\Theta\Gamma$.
 - γ) $AH=2Z\Theta$.



33. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Gamma\Delta\perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta=AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:
- α) $AM \parallel \Gamma\Delta$
 - β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.
 - γ) $\widehat{\Delta A \Gamma} = 45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$.
 - δ) $A\Delta < 2AB$.

