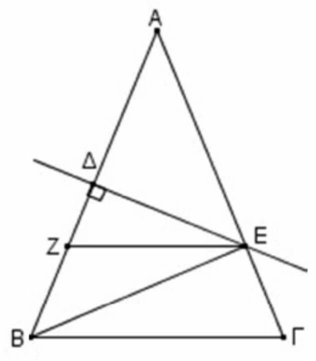
1. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΒΕ.

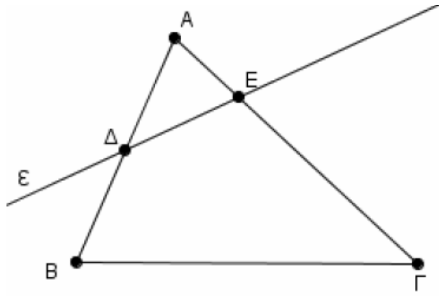
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ και σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του ΑΒΓ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

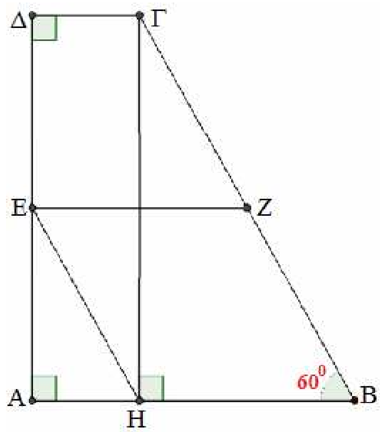


3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΑΒ>ΓΔ, ΒΓ=4ΓΔ και $\hat{B} = 60^o$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντιστοίχως.

Να δείξετε ότι:

α) ΑΒ=3ΓΔ.

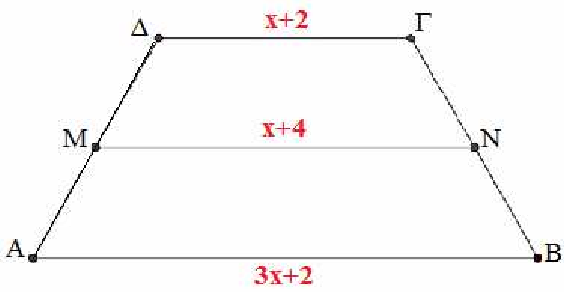
β) Το τετράπλευρο ΕΗΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.



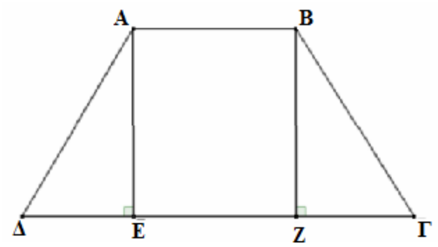
4. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι: ΑΒ=3x+2, ΓΔ=x+2 και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι ΜΝ=x+4, τότε να δείξετε ότι x=2.

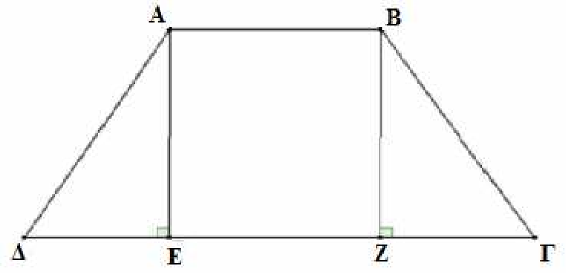
β) Αν η γωνία Γ είναι διπλάσια της γωνίας Β, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.



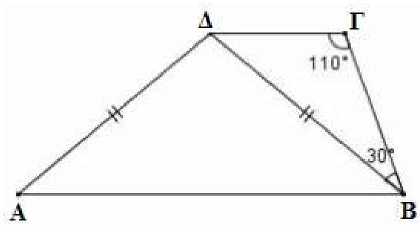
5. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^o$, ΑΔ=12 και ΓΔ=20.
Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.
α) Να αποδείξετε ότι ΔΕ=ΓΖ και ΑΒ=ΕΖ.
β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου.



6. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.
Να αποδείξετε ότι:
α) ΔΕ=ΓΖ.
β) ΑΖ=ΒΕ.

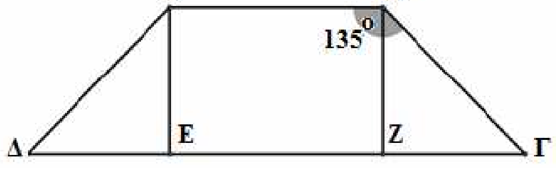


7. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ.
Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^o$ και η γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma} = 30^o$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A \Delta B}$.



8. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ<ΓΔ. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε ΑΕ=ΕΖ=ΖΒ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΔΖ=ΓΕ
β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή.

9. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ και Β=135^o. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΕΔ=ΒΖ=ΓΖ.

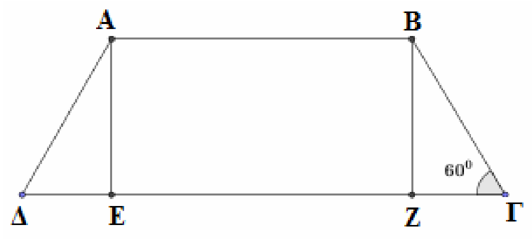


10. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ=6, ΒΓ=4 και $\hat{\Gamma}=60^o$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΒΖΓ είναι ίσα.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.

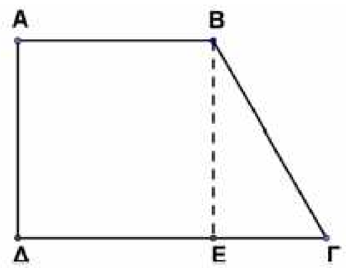


11. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ), με ΑΒ=ΒΓ=4, $\hat{A}=90^o$ και $\hat{\Gamma}=60^o$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από τη κορυφή Β.

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε 2ΕΓ=ΒΓ.

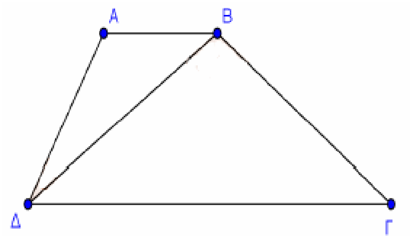
γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ.



12. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΒΔ=ΒΓ. Αν $\widehat{\Delta B\Gamma}=110^o$ και ο $\widehat{A\Delta B}=25^o$, να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ.

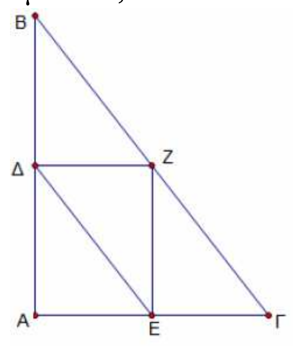
β) Τη γωνία Α.



13. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

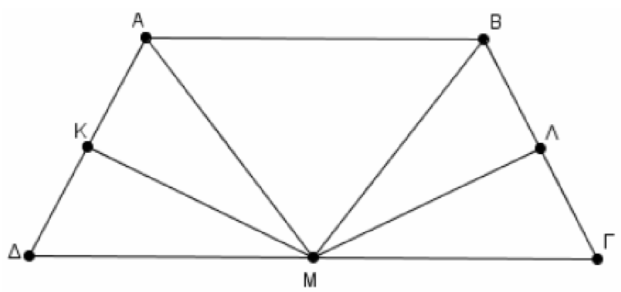
β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



14. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα.

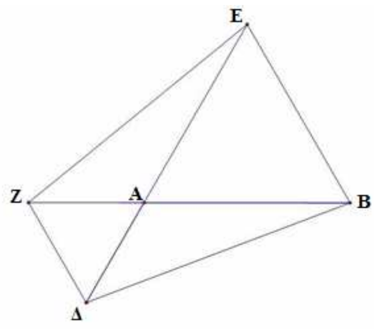
β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα.



15. Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με Α=120^o. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



16. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ=ΚΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα,

ii. το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΝΔ και ΔΚ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο .

17. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=8 και ΔΓ=12. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου:

α) να αποδείξετε ότι ΔΗ=ΘΓ.

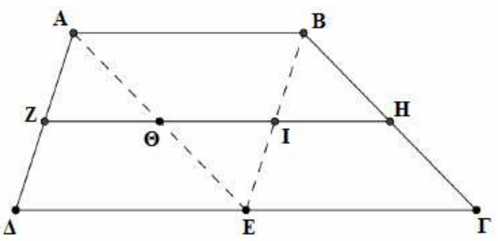
β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου.

18. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΓΔ= 2ΑΒ. Επίσης τα Ζ, Η, Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.

γ) Να δείξετε ότι ΖΗ = $\frac{3}{2}$ ΑΒ.

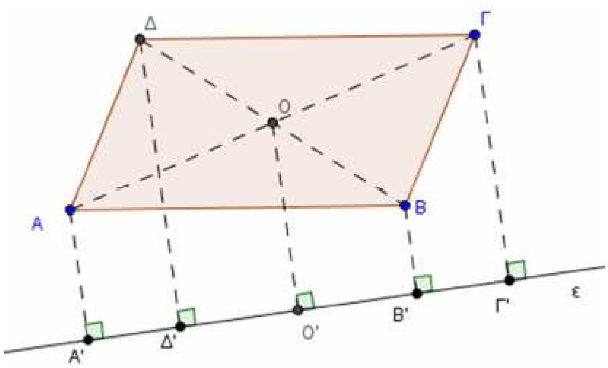


19. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α', Β', Γ', Δ' των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε.

α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι ΑΑ'=3, ΒΒ'=2, ΓΓ '=5, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.

ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ'.

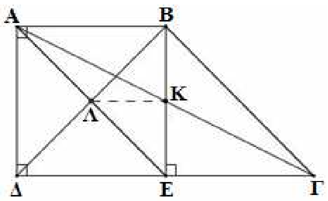


β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ'; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

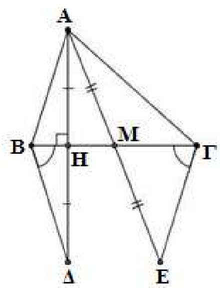
20. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}$ =90^o) και η διχοτόμος ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ⊥ΑΓ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα.
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.
δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

21. Δίνεται οξεία γωνία xOy και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, $ρ_1$) και (O, $ρ_2$) με $ρ_1<ρ_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία Κ, Α και την Oy στα Λ, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΛ=ΒΚ.
β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ.
γ) Η ΟΡ διχοτομεί την γωνία xOy.

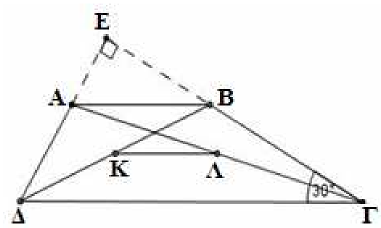
22. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{Α} = \hat{Δ}$ =90°, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{Β} = 3\hat{Γ}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\hat{Γ}$ =45°
β) ΒΔ=ΑΕ
γ) ΚΛ=$\frac{1}{4}$ΔΓ.



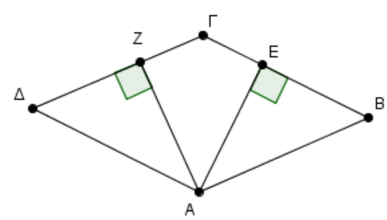
23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ=ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ=ΒΔ=ΓΕ
β) $\widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΒΓΕ}$.
γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



24. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με Γ=30^o και έστω Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε.
Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ=2ΑΕ.
β) ΚΛ=ΑΔ.
γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



25. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε ΑΖ⊥ΓΔ και ΑΕ⊥ΓΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.
β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΕ.
γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



26. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΑΒ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος.

γ) Αν επιπλέον είναι $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{A}\Delta}=120^{\mathrm{o}}$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΕΟΒΓ.

27. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\Delta}=90^{\mathrm{o}}$, $\mathrm{AB}=\frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $\mathrm{AB}=\frac{1}{3}\mathrm{A}\Delta$.Φέρουμε ΒΕ⊥ΔΓ.

α) Να δείξετε ότι το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.

β) Να δείξετε ότι το ΒΕΓ είναι τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσον του ΒΚ.

28. Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες ε_1, ε_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

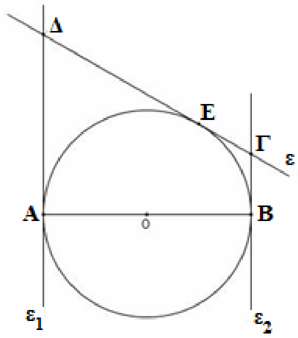
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

ii. ΓΔ=ΑΔ+ΒΓ.

iii. Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

β) Αν η γωνία ΑΔΕ είναι 60^{o} και η ΟΔ τέμνει τον κύκλο (Ο, R) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ είναι μέσο του ΔΟ.



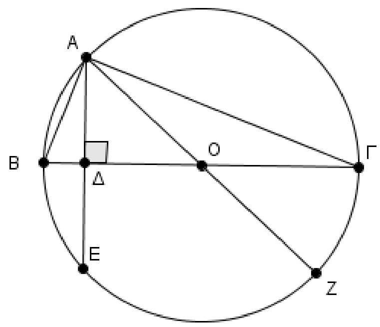
29. Δίνεται κύκλος (Ο,R) με διάμετρο ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Α του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Η προέκταση της ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ, η προέκταση του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΖΓ=ΑΒ=ΒΕ

ii. Το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Αν $\hat{\Gamma}=30^{\mathrm{o}}$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου ΒΕΖΓ είναι ίση με 5R, όπου R η ακτίνα του κύκλου.



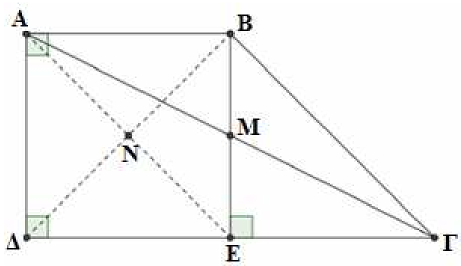
30. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\Delta}=90^{\mathrm{o}}$, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{\mathrm{B}}=3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε ΒΕ⊥ΔΓ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}=45^{\mathrm{o}}$.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) $\mathrm{MN}=\frac{\Gamma\Delta}{4}$.

δ) ΑΕ⊥ΒΔ.

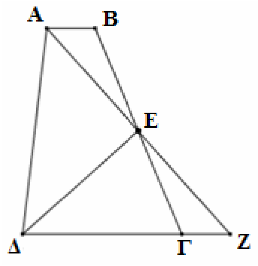


31. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) ισχύει ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές.

β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ

γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου.

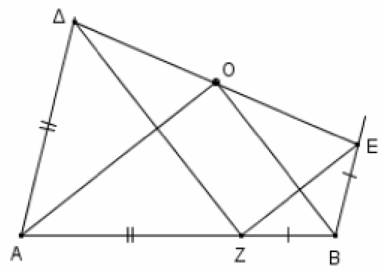


32. Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ, με ΑΔ//ΒΕ, στο οποίο ισχύει ότι ΑΒ=ΑΔ+ΒΕ, και Ο το μέσον της ΔΕ. Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ=ΑΔ και ΒΖ=ΒΕ. Αν $\widehat{\Delta A Z}=\varphi$:

α) να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ ως συνάρτηση της φ.

β) να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ ως συνάρτηση της φ.

γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.

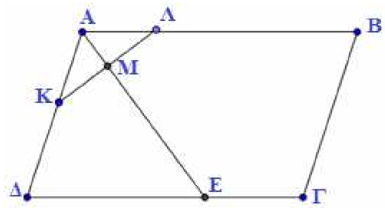


33. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με ΑΒ>ΑΔ. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΑΚ=ΑΛ. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ.

β) ΒΓ+ΓΕ=ΑΒ.

γ) $\hat{B}=2\cdot\widehat{A\Lambda K}$.



34. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2·ΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.

β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

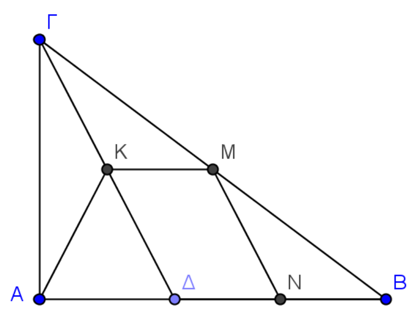
γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ.

35. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ, Μ, Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$.

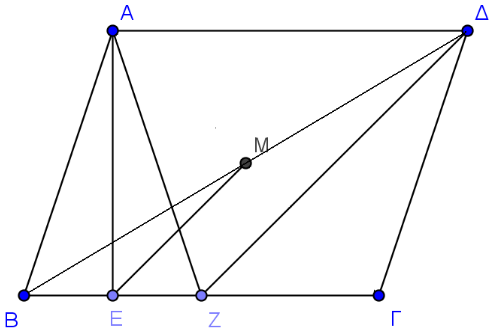


36. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B}=70^o$ και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε ΒΕ=ΕΖ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $ΕΜ=\frac{ΑΓ}{2}$.

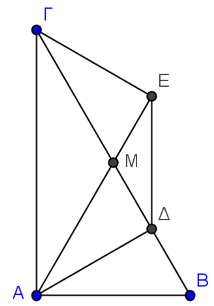


37. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$ και $\hat{Γ}=30^o$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσο του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, θ οποία την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.

β) $ΜΕ=ΜΔ=\frac{ΒΓ}{4}$.

γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



38. **α**) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

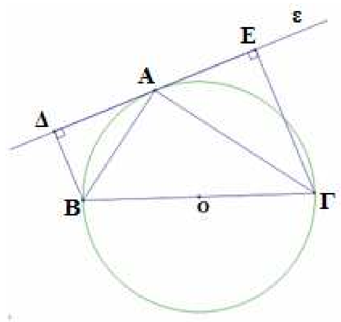
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντηση σας.

39. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΔΒΓ και ΕΓΒ αντίστοιχα.

β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΑΕ=ΑΖ.

γ) Να αποδείξετε ότι ΒΔ+ΓΕ=ΒΓ.

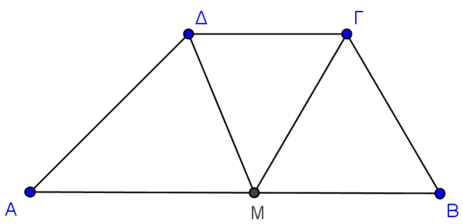


40. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ=ΑΔ+ΒΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου.

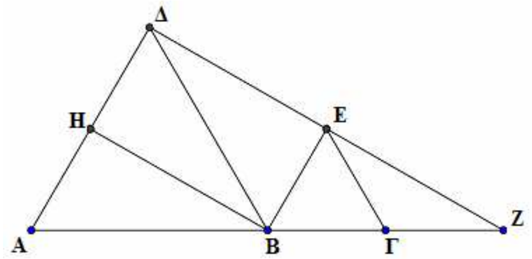


41. Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε ΑΒ=2ΒΓ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.

β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

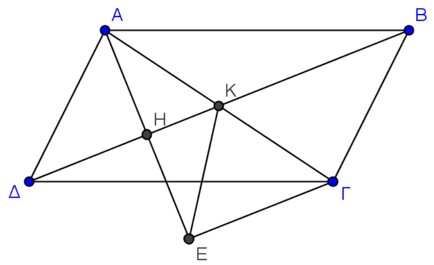


42. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΗ=ΗΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

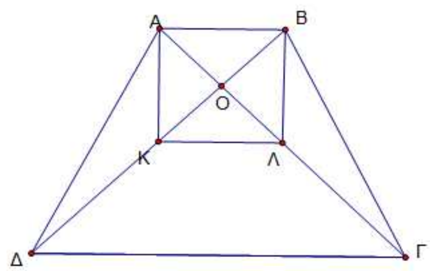


43. Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: ΑΔ=ΒΓ, ΑΓ=ΒΔ, και ΑΒ<ΓΔ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι ΓΔ=3ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

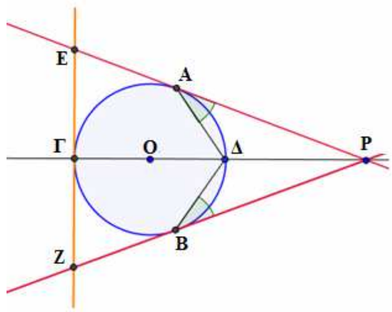


44. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ και τη διακεντρική ευθεία ΡΟ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta A P} = \widehat{\Delta B P}$.

β) ΕΑ=ΖΒ.

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

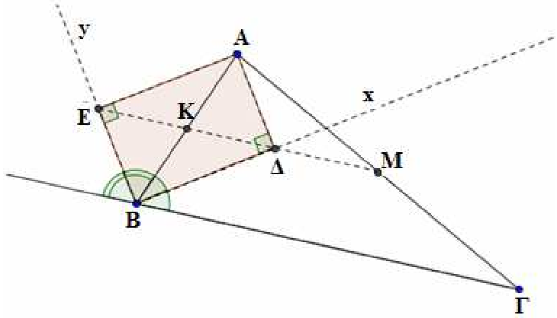


45. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η Βx είναι διχοτόμος της γωνίας Β και η Βy διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο.

β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσος του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου α=ΒΓ.



46. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Εάν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.

β) ΖΓ=2ΟΕ.

γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

47. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα.

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.

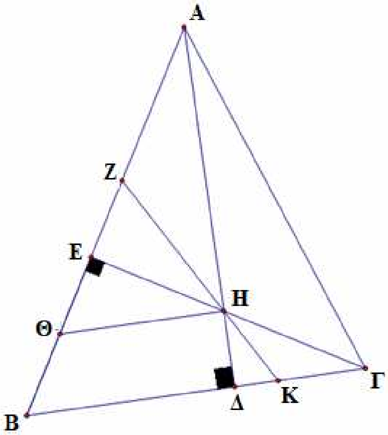
β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε ΚΛ//ΔΒ και ΚΛ=$\frac{3}{2}$ΔΒ.

48. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{B}=60^o$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε την ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Για το τμήμα ΖΕ ισχύει ΖΗ=2ΕΖ.

β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο.

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

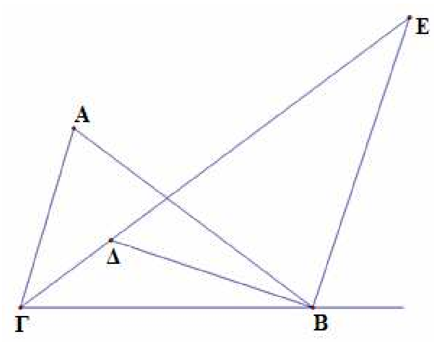


49. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο Δ. Η εξωτερική διχοτόμος της Β τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Ε. Δίνεται ότι $\widehat{ABE} = 70^o = 2\cdot\widehat{\Gamma EB}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΒΕ είναι τραπέζιο.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές



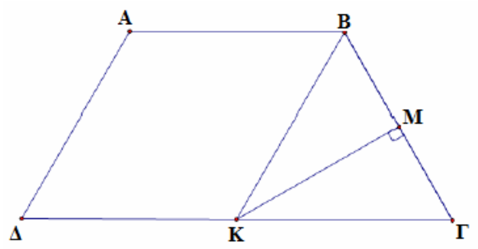
50. Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και ΑΒ=ΒΓ=ΑΔ=$\frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ.

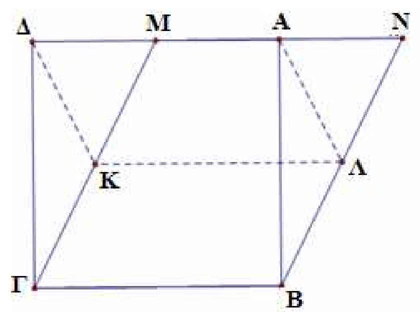


51. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα ΑΝ=$\frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

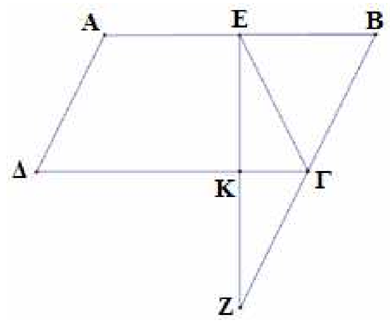


52. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Στην προέκταση του ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΖ=ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στη ΑΒ, τέτοιο ώστε ΕΓ=ΓΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή.

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.



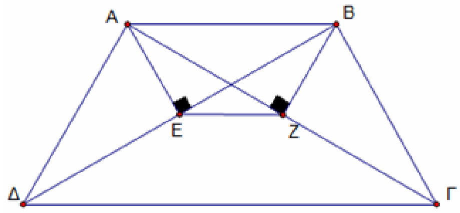
53. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ=ΑΒ. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

β) ΑΕ=ΒΖ.

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.



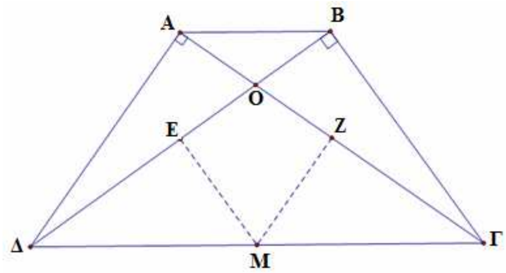
54. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΕ=ΜΖ.

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ.

γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα.

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετη του ΕΖ.



55. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Αδ τη διχοτόμο της γωνίας Α. Η μεσοκάθετος (μ) της πλευράς ΒΓ τέμνει την Αδ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρνουμε τις ΕΔ και ΗΔ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΕ=ΓΖ .

ii. Το τετράπλευρο ΒΖΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Κάποιος μαθητής έκανε τον εξής συλλογισμό:

«Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

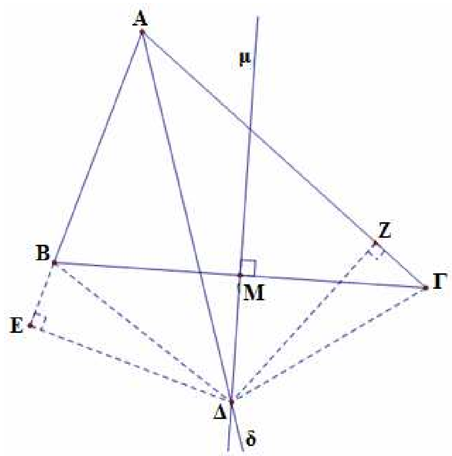
1. ΑΔ κοινή

2. ΒΔ=ΓΔ λόγω μεσοκαθέτου.

3. $\widehat{\mathrm{BA\Delta}} = \widehat{\Gamma \mathrm{A\Delta}}$ *λόγω διχοτόμου.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π»

Έχει δίκιο ή όχι ο μαθητής; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

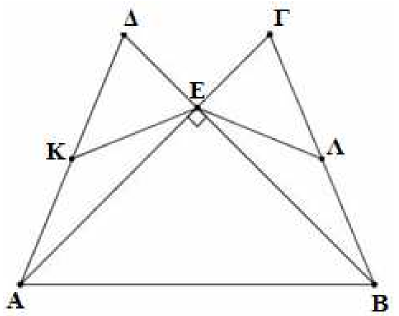


56. Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΑΒ=ΑΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να είναι κάθετες. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΔ=ΕΓ.

β) ΔΓ//ΑΒ.

γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ.



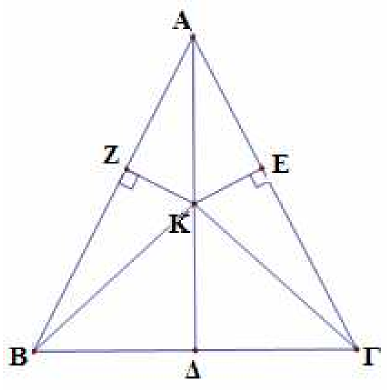
57. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ είναι ίσα.

ii. Το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές.

iii. Το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



β) Ένας μαθητής στο (αi.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ έχουν:

1. ΒΚ=ΚΓ.

2. $\widehat{\mathrm{BAK}} = \widehat{\Gamma\mathrm{AK}}$ *επειδή ΑΚ διχοτόμος της Α.*

3. $\widehat{\mathrm{ABK}} = \widehat{\mathrm{A}\Gamma\mathrm{K}}$ *ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γ-Π-Γ»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής.

Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γ-Π-Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.

58. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες .

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες.

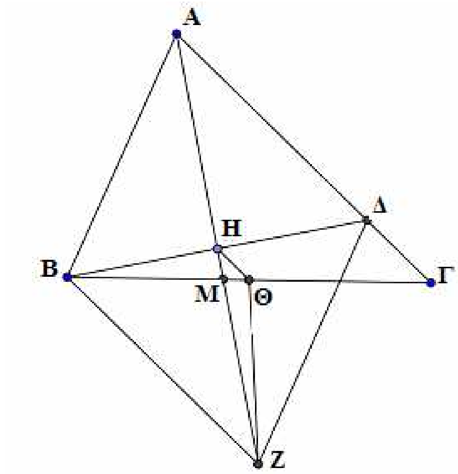
59. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ=ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος.

β) το τετράπλευρο ΗΒΖΘ είναι τραπέζιο.

γ) η διάμεσος του τραπεζίου ΗΒΖΘ είναι ίση με $\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Gamma}{4}$.



60. Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με ΑΒ>ΒΓ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.

ii. $\text{ΑΜ}=\dfrac{\text{ΑΓ}}{4}$.

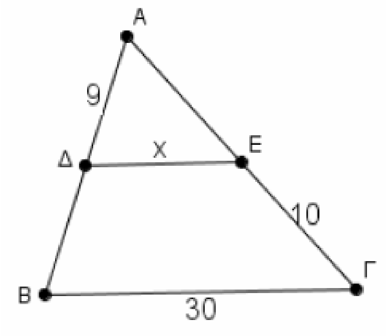
β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

61. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ=9, ΕΓ=10 και ΒΓ=30 .

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ.



62. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ=8 , ΕΔ=9 και ΔΒ=10 .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετράπλευρου ΔΕΓΒ.