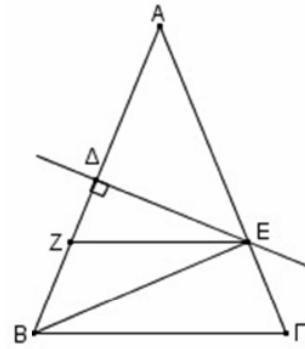


1. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι $AE=BE$.

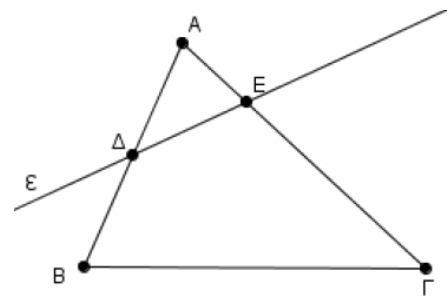
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά AG σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

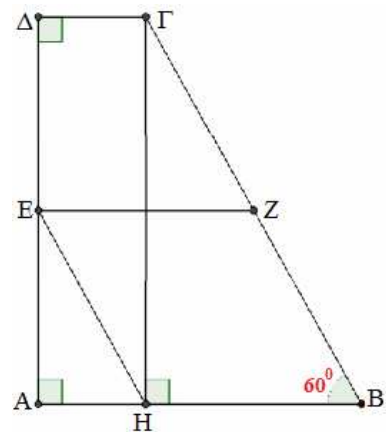
β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $AB\Gamma$ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



3. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα E και Z των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι:

α) $AB=3\Gamma\Delta$.

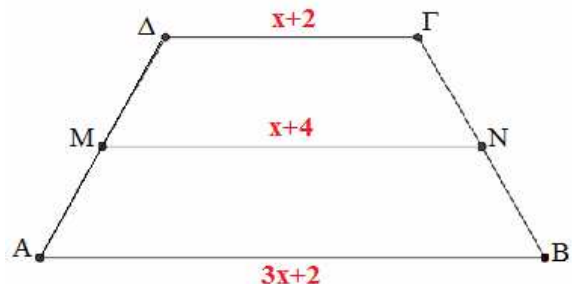
β) Το τετράπλευρο $EHBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



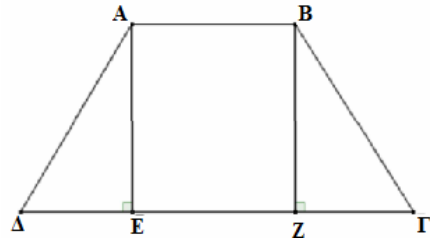
4. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι: $AB=3x+2$, $\Gamma\Delta=x+2$ και το μήκος της διαμέσου του τραpezίου είναι $MN=x+4$, τότε να δείξετε ότι $x=2$.

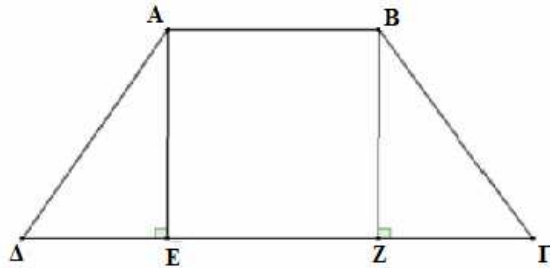
β) Αν η γωνία Γ είναι διπλάσια της γωνίας B , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.



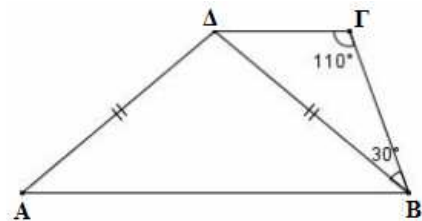
5. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $A\Delta = 12$ και $\Gamma\Delta = 20$.
 Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .
 α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Gamma Z$ και $AB = EZ$.
 β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραpezίου.



6. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .
 Να αποδείξετε ότι:
 α) $\Delta E = \Gamma Z$.
 β) $AZ = BE$.

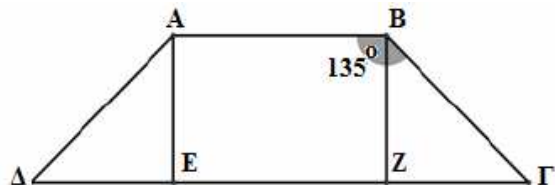


7. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$.
 Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\widehat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\Delta B}$.



8. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:
 α) $\Delta Z = \Gamma E$
 β) Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

9. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $B = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .
 α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.
 β) Να αποδείξετε ότι $AE = EZ = BZ = \Gamma Z$.



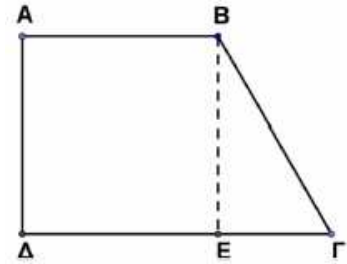
10. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$), με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{\Gamma}=60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

- α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.
 β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα.
 γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.



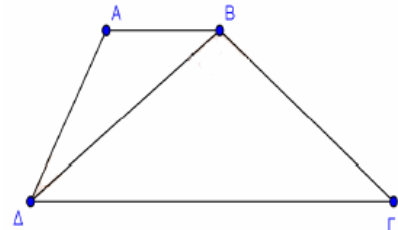
11. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$), με $AB=B\Gamma=4$, $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{\Gamma}=60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος BE από τη κορυφή B .

- α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.
 β) Να αποδείξετε $2E\Gamma=B\Gamma$.
 γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος MN .



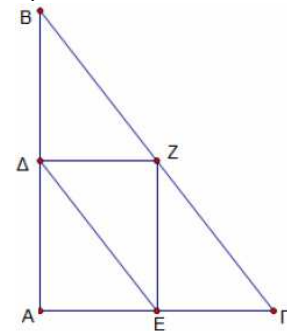
12. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ και $B\Delta=B\Gamma$. Αν $\widehat{\Delta B\Gamma}=110^\circ$ και ο $\widehat{A\Delta B}=25^\circ$, να υπολογίσετε:

- α) Τη γωνία Γ .
 β) Τη γωνία A .



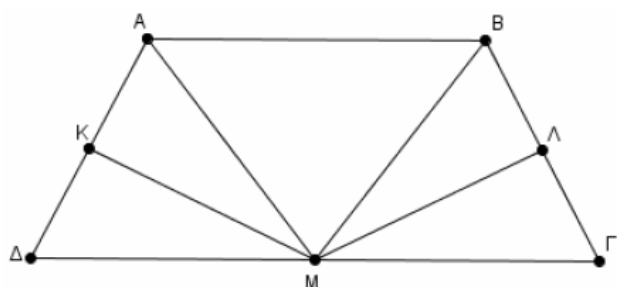
13. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
 β) Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

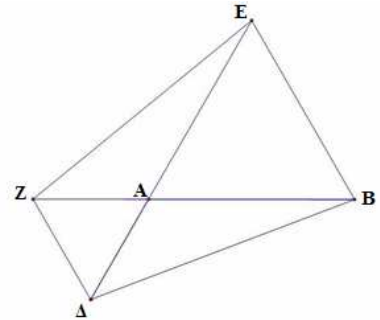


14. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.
 β) Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.



15. Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\angle A=120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ είναι ίσα.
 - Το τετράπλευρο $B\Delta ZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

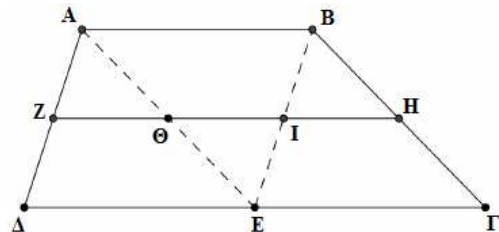


16. Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN=K\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι:
 - τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα,
 - το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - Αν E και Z είναι τα μέσα των $N\Delta$ και ΔK αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $NKZE$ είναι τραπέζιο.

17. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραpezίου:
- να αποδείξετε ότι $\Delta H=\Theta\Gamma$.
 - να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραpezίου.

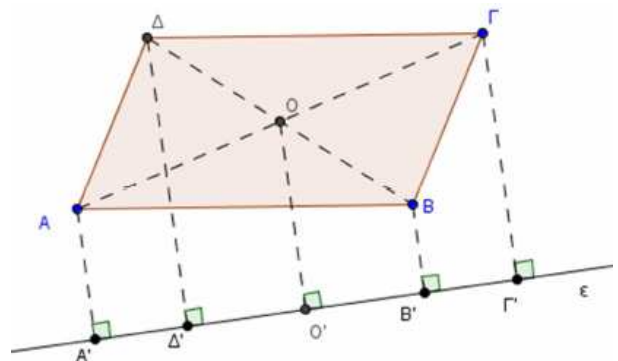
18. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta=2AB$. Επίσης τα Z, H, E είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE στα σημεία Θ, I αντίστοιχα.

- Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, I είναι μέσα των AE, BE αντίστοιχα.
- Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2} AB$.



19. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A', B', Γ', Δ' των κορυφών του A, B, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ϵ .

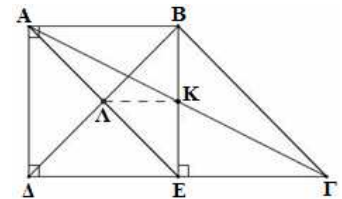
- Αν η ευθεία ϵ αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA'=3, BB'=2, \Gamma\Gamma'=5$, τότε:
 - Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ϵ είναι ίση με 4.
 - Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.
- Αν η ευθεία ϵ διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας



20. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και η διχοτόμος $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA .
 Να αποδείξετε ότι:
 α) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
 β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα.
 γ) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$.
 δ) Το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

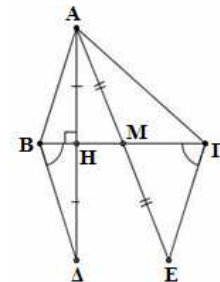
21. Δίνεται οξεία γωνία $\chi O\upsilon$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την $O\chi$ στα σημεία K, A και την $O\upsilon$ στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
 α) $AL=BK$.
 β) Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL και BK .
 γ) Η OP διχοτομεί την γωνία $\chi O\upsilon$.

22. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και την $\Gamma\Delta$ στο E . Επίσης φέρνουμε την AE που τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο Λ . Να αποδείξετε ότι:



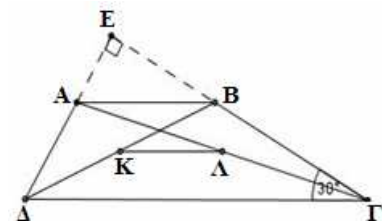
- α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
 β) $B\Delta = AE$
 γ) $K\Lambda = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$.

23. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta = AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:
 α) $AB = B\Delta = \Gamma E$
 β) $\widehat{B\Delta\Lambda} = \widehat{B\Gamma E}$.
 γ) Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



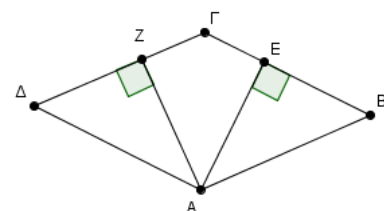
24. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνονται τέμνοντάς τις κάθετα στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) $AB = 2AE$.
 β) $K\Lambda = A\Delta$.
 γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



25. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.
 β) Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE .
 γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZMNE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



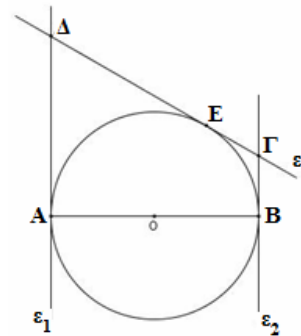
26. Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) είναι $AB=AD$.
- Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .
 - Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.
 - Αν επιπλέον είναι $\widehat{BA\Delta}=120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $EOB\Gamma$.

27. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

- Να δείξετε ότι το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- Να δείξετε ότι το BEG είναι τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές.
- Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσον του BK .

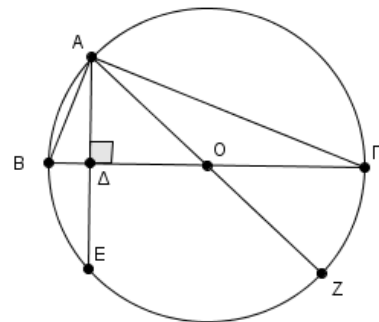
28. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι:
 - Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
 - $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.
 - Το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- Αν η γωνία $A\Delta E$ είναι 60° και η $O\Delta$ τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K είναι μέσο του ΔO .



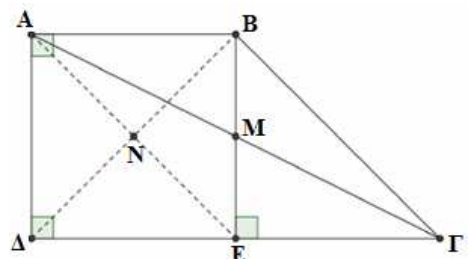
29. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο $B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο A του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$. Η προέκταση της AO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Z . Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$, η προέκταση του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο E .

- Να αποδείξετε ότι:
 - $Z\Gamma = AB = BE$
 - Το τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπέζιου $BEZ\Gamma$ είναι ίση με $5R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου.

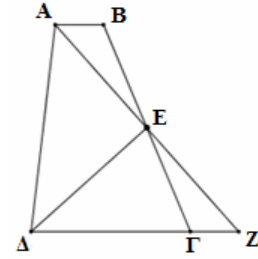


30. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο N . Να αποδείξετε ότι:

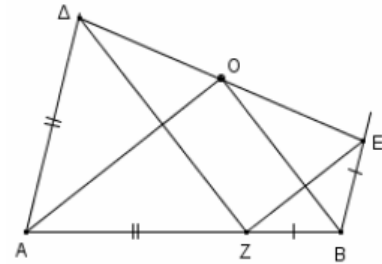
- $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.
- Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- $MN = \frac{\Gamma\Delta}{4}$.
- $AE \perp B\Delta$.



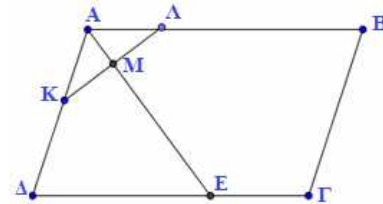
31. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) ισχύει $AB+\Gamma\Delta=AD$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.
 - Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$
 - Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραpezίου.



32. Δίνεται τραπέζιο $A\Delta EB$, με $A\Delta//BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB=A\Delta+BE$, και O το μέσον της ΔE . Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ=A\Delta$ και $BZ=BE$. Αν $\widehat{\Delta AZ}=\varphi$:
- να εκφράσετε τη γωνία $AZ\Delta$ ως συνάρτηση της φ .
 - να εκφράσετε τη γωνία EZB ως συνάρτηση της φ .
 - να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα.

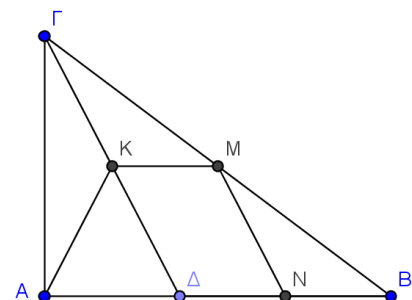


33. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB>A\Delta$. Θεωρούμε σημεία K, Λ των $A\Delta$ και AB αντίστοιχα ώστε $AK=A\Lambda$. Έστω M το μέσο του $K\Lambda$ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:
- $A\Delta=\Delta E$.
 - $B\Gamma+\Gamma E=AB$.
 - $\widehat{B}=2\cdot\widehat{A\Lambda K}$.



34. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2\cdot B\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και M, N τα μέσα των $AB, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος.
 - Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 - Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $ME\Gamma$.

35. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 - Η διάμεσος του τραpezίου $AKMN$ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$.



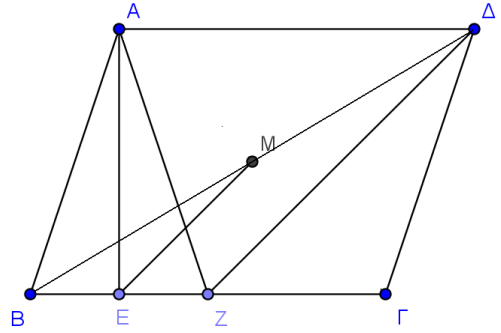
36. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B}=70^\circ$ και το ύψος του AE . Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE=EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου $AZ\Gamma\Delta$

γ) Αν M το μέσο του $B\Delta$, να αποδείξετε ότι

$$EM = \frac{A\Gamma}{2}.$$

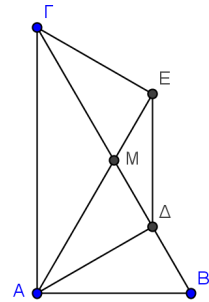


37. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{\Gamma}=30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσο του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , θ οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

β) $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$.

γ) Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



38. α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.

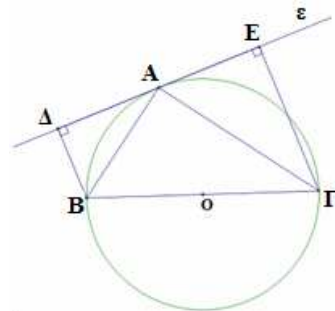
β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

39. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O , με διάμετρο $B\Gamma$. Από σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ϵ) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Από τα σημεία B και Γ φέρουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στην ευθεία (ϵ).

α) Να αποδείξετε ότι BA και ΓA είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma B$ αντίστοιχα.

β) Αν AZ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE = AZ$.

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$.

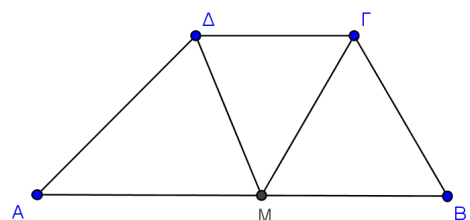


40. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

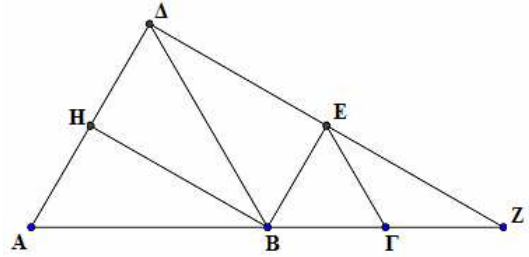
α) Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο $M B\Gamma$ είναι ισοσκελές.

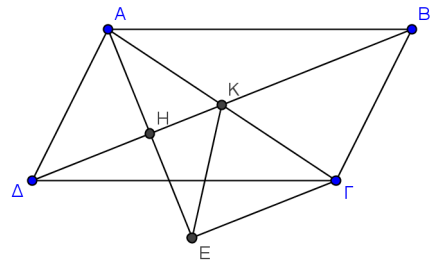
γ) Η ΓM είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπέζιου.



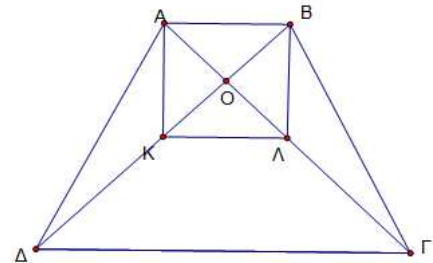
41. Σε μια ευθεία (ϵ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB=2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία DE τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.
 - Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.
 - Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



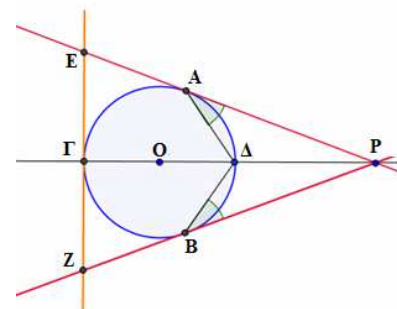
42. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AH=HE$. Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές.
 - Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.
 - Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



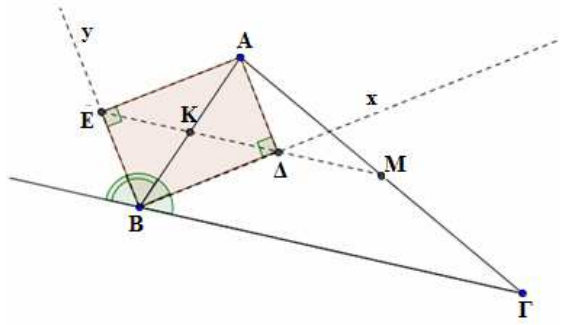
43. Στο παρακάτω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $A\Delta=B\Gamma$, $A\Gamma=B\Delta$, και $AB<\Gamma\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελή.
 - Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
 - Αν επιπλέον ισχύει ότι $\Gamma\Delta=3AB$ και K, Λ τα μέσα των διαγωνίων $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



44. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου κέντρου O φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB και τη διακεντρική ευθεία PO που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των PA και PB στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- $\widehat{\Delta AP} = \widehat{\Delta BP}$.
 - $EA=ZB$.
 - Το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



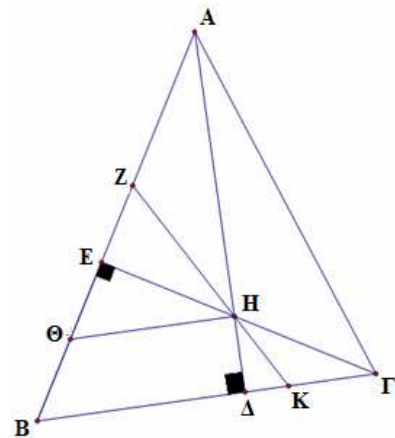
45. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η Bx είναι διχοτόμος της γωνίας B και η By διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας B . Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο.
 - Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της $A\Gamma$.
 - Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και η διάμεσος του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha=B\Gamma$.



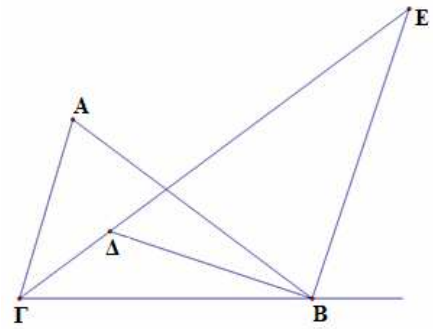
46. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Φέρνουμε την AE κάθετη στην διαγώνιο $B\Delta$. Εάν Z είναι το συμμετρικό του A ως προς την διαγώνιο $B\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.
 - $Z\Gamma=2OE$.
 - Το $B\Delta Z\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

47. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE=AB$ και στην προέκταση της πλευράς $A\Delta$ τμήμα $\Delta Z=A\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι:
 - Τα τετράπλευρα $B\Delta\Gamma E$ και $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα.
 - Τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά.
 - Αν K και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2} \Delta B$.

48. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $\hat{B}=60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη $A\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε την KZ διχοτόμο της γωνίας EHA και ΘH κάθετο στο ύψος $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- Για το τμήμα ZE ισχύει $ZH=2EZ$.
 - Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο.
 - Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.

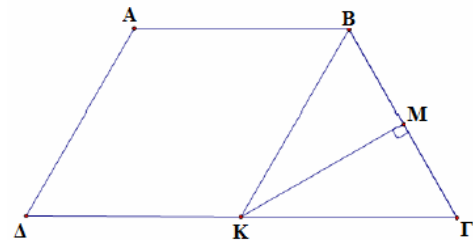


49. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνονται στο Δ . Η εξωτερική διχοτόμος της B τέμνει την προέκταση της $\Gamma\Delta$ στο E . Δίνεται ότι $\widehat{ABE} = 70^\circ = 2 \cdot \widehat{\Gamma EB}$.
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma BE$ είναι τραπέζιο.
- γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές



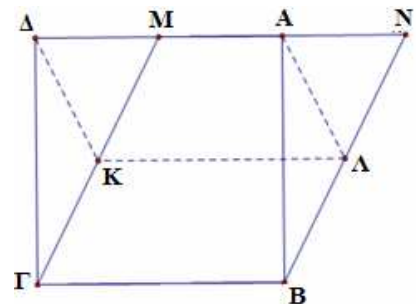
50. Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B , η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.
- β) Να αποδείξετε ότι:
- i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.
 - ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.



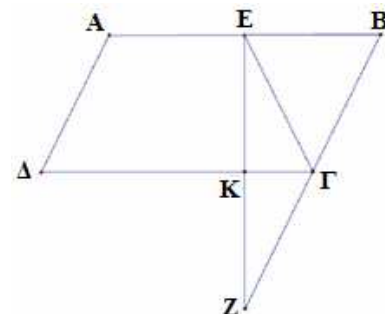
51. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και

- θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- α) Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - β) Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - γ) Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

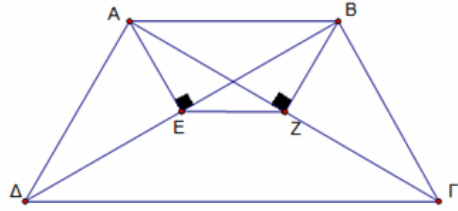


52. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma Z = B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στη AB , τέτοιο ώστε $E\Gamma = \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

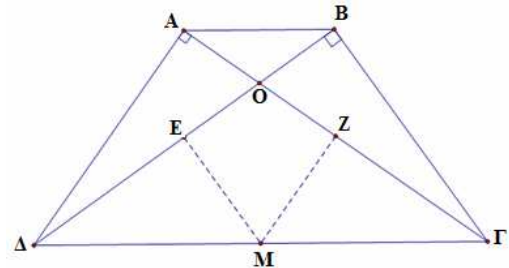
- α) Η γωνία BEZ είναι ορθή.
- β) Το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο
- γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



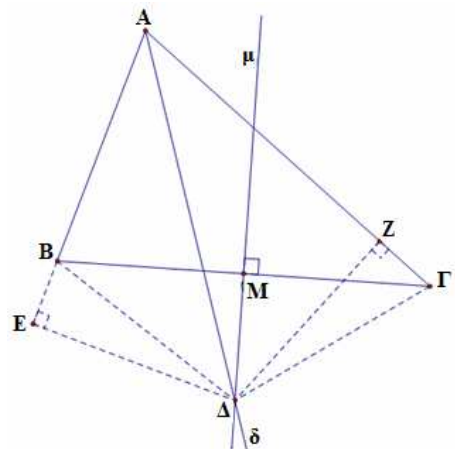
53. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB\parallel\Gamma\Delta$ και $A\Delta=B\Gamma=AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγώνιες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.
 - $AE=BZ$.
 - Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 - Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .



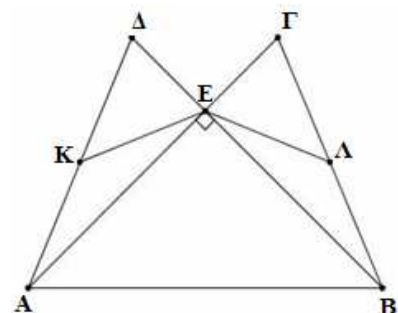
54. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB\parallel\Delta\Gamma$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M , E και Z των $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- $ME=MZ$.
 - Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$.
 - Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $MZ\Gamma$ είναι ίσα.
 - Η OM είναι μεσοκάθετη του EZ .



55. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\delta$ τη διχοτόμο της γωνίας A . Η μεσοκάθετος (μ) της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\delta$ στο σημείο Δ . Από το Δ φέρνουμε τις $E\Delta$ και $H\Delta$ κάθετες στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
- Να αποδείξετε ότι:
 - $BE=\Gamma Z$.
 - Το τετράπλευρο $BZ\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 - Κάποιος μαθητής έκανε τον εξής συλλογισμό:
 1. $A\Delta$ κοινή
 2. $B\Delta=\Gamma\Delta$ λόγω μεσοκαθέτου.
 3. $\widehat{BA\Delta}=\widehat{\Gamma A\Delta}$ λόγω διχοτόμου.
 Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π»
 Έχει δίκιο ή όχι ο μαθητής; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



56. Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και $AB\Delta$ ($AB=A\Delta$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ να είναι κάθετες. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- $E\Delta=E\Gamma$.
 - $\Delta\Gamma\parallel AB$.
 - Το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και $K\Lambda\parallel AB$.



57. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και AG αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα ABK και AGK είναι ίσα.
- ii. Το τρίγωνο ZKE είναι ισοσκελές.
- iii. Το τετράπλευρο $Z\epsilon\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Ένας μαθητής στο (αι.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα AD είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε και το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.

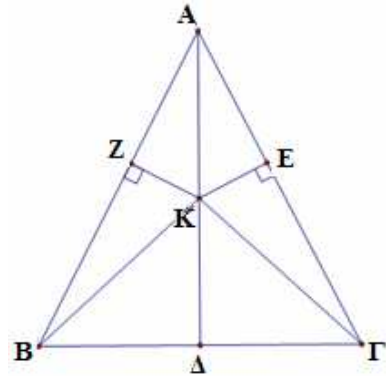
Τα τρίγωνα ABK και AGK έχουν:

1. $BK=K\Gamma$.
2. $\widehat{BAK} = \widehat{GAK}$ επειδή AK διχοτόμος της A .
3. $\widehat{ABK} = \widehat{AGK}$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γ -Π- Γ »

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής.

Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γ -Π- Γ γωνία διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$.



58. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των AB , AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

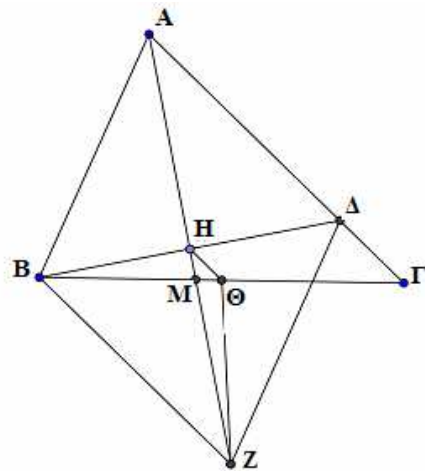
- α) το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- β) οι γωνίες $H\Delta Z$ και HEZ είναι ίσες .
- γ) οι γωνίες $E\Delta Z$ και EHZ είναι ίσες.

59. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την AG στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH=HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.
- β) το τετράπλευρο $HBZ\Theta$ είναι τραπέζιο.
- γ) η διάμεσος του τραpezίου $HBZ\Theta$ είναι ίση

με $\frac{AB + AG}{4}$.



60. Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

ii. $AM = \frac{A\Gamma}{4}$.

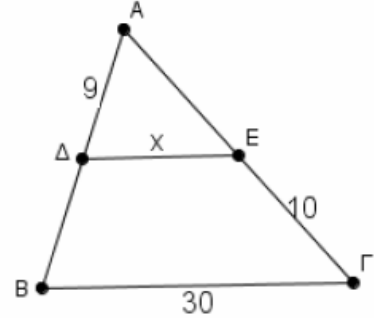
β) Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη $B\Delta$, να αποδείξετε ότι το $M\Gamma N\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

61. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔE .



62. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE = 8$, $E\Delta = 9$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετράπλευρου $\Delta E\Gamma B$.

