1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=1+2\eta\mu\frac{x}{2}$ β) $g(x)=-1+3\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}x)$

γ) $f(x)=-2-2\eta\mu(\frac{\pi}{4}x)$ δ) $g(x)=3-2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi x}{4})$

2. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2+3\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k, ρ και ω με ω>0, για τους οποίους η συνάρτηση $f(x)=k+\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot x)$ έχει περίοδο Τ=4 , μέγιστη τιμή $f_{max}=3$ και ελάχιστη τιμή $f_{min}=-1$.

4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k , ρ και ω>0 για τους οποίους η συνάρτηση $f(x)=k+\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ έχει περίοδο Τ=6 , μέγιστη τιμή $f_{max}=5$ και ελάχιστη τιμή $f_{min}=-3$.

1.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\left(2\eta\mu x-\sqrt{3}\right)\left(2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{2}\right)=0$ β) $\varepsilon\varphi x\left(\sigma\varphi^2 x-1\right)=0$

γ) συνx ημ2x=συνx δ) $\eta\mu^2 x-\eta\mu^2 3x=0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $2\eta\mu^2 x-3\eta\mu x+1=0$ β) $\eta\mu(2x+\frac{\pi}{3})=\eta\mu x$ γ) $\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{4})$

δ) εφ3x+σφx=0 ε) $\varepsilon\varphi^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}=0$

3. Να λυθούν στο διάστημα [-π,π) οι εξισώσεις :

α) $2\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}=0$ β) $\sqrt{3}\varepsilon\varphi x=3$

4. Να λυθεί στο διάστημα [0, π] η εξίσωση : 2ημ3x=1

5. Να λυθεί η εξίσωση : $4\sigma\upsilon\nu^4 x-7\sigma\upsilon\nu^2 x+3=0$

6. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\varphi x\,\sigma\upsilon\nu x+1=\sigma\varphi x+\sigma\upsilon\nu x$

7. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi 3x\,\sigma\varphi x=1$ στο [0, 2π].

8. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 2x=1$

9. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\varphi 3x = \sigma\varphi 2x$

10. Να λυθεί η εξίσωση : $3\eta\mu^2 x + 7\sigma\upsilon\nu^2 x = 5$

11. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi 2x \cdot \sigma\varphi 5x = 1$

12. Να λυθεί η εξίσωση : $4\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 2 = 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x$

13. Να λυθεί η εξίσωση $5\eta\mu^2 x + \sqrt{3}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 6\sigma\upsilon\nu^2 x = 5$

14. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu(3x - \frac{\pi}{3}) + \sigma\upsilon\nu(3x - \frac{\pi}{3}) = 0$

15. Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^2 x - 3|\eta\mu x| + 1 = 0$

16. Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 4 = 0$

17. Να λυθεί η εξίσωση: $\varepsilon\varphi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x = 0$

18. Να λυθεί η εξίσωση: $1 - \frac{2\sqrt{3}}{\varepsilon\varphi x} = \frac{3}{\varepsilon\varphi^2 x}$

19. Να βρεθεί για ποιες τιμές του x καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της.

α. $f(x) = 1 - 2\eta\mu 2x \ , \ 0 \le x \le 2\pi$

β. $f(x) = -1 + 3\sigma\upsilon\nu(\pi x) \ , \ 0 \le x \le 3$

20. Να λυθεί η εξίσωση : $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3|\sigma\upsilon\nu x| - 2 = 0$ (1).

21. Να λυθεί η εξίσωση : $4\eta\mu^4 x - 5\eta\mu^2 x + 1 = 0$ (1).

22. Να λυθεί η εξίσωση : $4\sigma\upsilon\nu^2 2x - 3 = 0$ (1).

23. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu^2 5x - \sigma\upsilon\nu^2 2x = 0$ (1).

24. Να λυθεί η εξίσωση : $2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x + 1$.

25. Να λυθεί η εξίσωση: $\left(1 - \eta\mu x\right)\left(1 + \varepsilon\varphi x\right)\left(1 + 2\sigma\upsilon\nu x\right) = 0$.

26. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu(2x + \frac{\pi}{5}) + \sqrt{3}\eta\mu(2x + \frac{\pi}{5}) = 0$.

27. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3} - 2x) + \eta\mu(x + \frac{\pi}{6}) = 0$

2.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x) = \left(m^3 - 9m\right)x^3 + \left(m^2 - 3m\right)x^2 + \left(m - 3\right)x + 9 - m^2$

2. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, τα πολυώνυμα $P(x) = 5\alpha x^3 - 2x + \alpha$ και $Q(x) = \left(\alpha^2 + 4\right)x^3 + \left(\alpha^2 - 1\right)x^2 + \left(\alpha^2 - 3\alpha\right)x + 1$ είναι ίσα.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \left(\alpha^2 - 6\alpha + 8\right)x^3 + \left(\beta^2 - 1\right)x^2 + \left(4 - \alpha\right)x + 1 + \beta$

Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο είναι το μηδενικό;

4. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x = 2 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $P(2x+1) = 3P(x) - 5$ να βρεθεί η αριθμητική τιμή P(11).

5. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x = 3 να βρεθεί μια ρίζα του πολυωνύμου $Q(x) = P(5x+8)$

6. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες το -1 και το 2 και αριθμητική τιμή -2 για x = 1.

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \left(x^2 + 2\right)^3 + \left(x^2 + x - 2\right)^5$

Ποιος ο βαθμός του πολυωνύμου;

Να βρεθεί ο σταθερός του όρος και το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + x - 2$

Να βρεθεί το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x) - P(x-1)$

Ποιες είναι οι ρίζες του Q(x);

9. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει : $\left[P(x)\right]^2 = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

10. Να γραφεί το πολυώνυμο $P(x) = 3x^2 - 7x + 5$ στη μορφή :

$P(x) = \alpha(x-1)(x+1) + \beta x(x-1) + \gamma(x-2)(x+3)$

11. Αν είναι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο

$P(x) = \alpha^2(\beta - \gamma)x^3 + \beta^2(\gamma - \alpha)x + \gamma^2(\alpha - \beta)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

12. Για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου

$P(x) = (m^3 - 7m^2 + 10m)x^3 - 2(m^2 - 2)x + 3$.

13. Για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α , β και γ τα πολυώνυμα

$P(x) = \left(\alpha + \beta\right)x^2 + \left(\beta - 2\gamma\right)x + 4$ και $Q(x) = \left(\alpha + \beta - \gamma\right)x^3 + 3x^2 - \left(\alpha + \gamma\right)x + 2\alpha + \beta$ είναι ίσα;

14. α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει : $\dfrac{1}{x\left(x+1\right)} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x+1}$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα : $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{\nu(\nu+1)}$.

15. Να βρεθεί ο σταθερός όρος και το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)=\left(x^2-x+1\right)^{2011}+\left(2x^2+x-2\right)^{2010}$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^2+x+1$. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου $P\left(P(x)\right)-x^4$.

17. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $P(x-1)=x^2-x+3$.

18. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 2, να βρεθεί μια ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)=P(3x-10)$.

19. Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(1)=0$ και $P(3x-1)=2P(x)+4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το $P(14)$.

20. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α το πολυώνυμο $P(x)=\left(\alpha^2-1\right)x^3+\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)x^2+\left(\alpha^2-5\alpha+4\right)x+\left(\alpha^3-1\right)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο;

21. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) τέτοιο ώστε: $\left[P(x)\right]^2+3P(x)+3x=9x^2-2$

2.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης :

α) $(2x^4-3x^3+5x^2-7x+1):(x^2-2x+3)$ β) $(x^6-2x):(x^3+1)$

γ) $(x^6+2x^4+x^2+x+2):(x+1)^3$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4-3x^3-7x^2+\alpha x+\beta$ και $Q(x)=x^2-3x+5$.

α) Να γίνει η διαίρεση $P(x):Q(x)$

β) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $Q(x)$ παράγοντας του $P(x)$.

3. Με την σχήμα Horner να γίνουν οι διαιρέσεις :

α) $(2x^3+x^2-x+2):(x+1)$ β) $(x^5-1):(x-1)$ γ) $(2x^4+x^3-2x^2+3x+2):(x+\frac{1}{2})$

4. Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :

α) $(2x^4-3x^3+5x^2+6x-2):(x+1)$ β) $(30x^{99}-40x^{59}+70x^{19}-6x^9+3):(x-1)$

5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=(x-3)^{2\nu+1}+x^3-1$, $\nu\in N^*$ με το πολυώνυμο $\delta(x)=x-2$.

6. Αν $P(x)=3x^4+40x^3+12x^2-10x+2039$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=-13$.

7. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $(x-3)$ δίνει υπόλοιπο 7 και διαιρούμενο με $(x+1)$ δίνει υπόλοιπο -1. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-3)(x+1)$.

8. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $f(x)=x^2-2x-3$ δίνει υπόλοιπο $3x-1$, να βρεθούν τα υπόλοιπα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ και το $x-3$.

9. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)^{\nu}+(x-2)^{2\nu}-1$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ διαιρείται (τέλεια) με το $f(x)=x^2-3x+2$.

10. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x)=2x^8+5x^6+2007$ δεν έχει παράγοντες της μορφής $x-\rho$ όπου $\rho\in\mathbb{R}$.

11. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x)=-3(x+1)^{21}+4(x+2)^{20}-x-5$
έχει παράγοντες όλους του παράγοντες του $Q(x)=x^2+3x+2$.

12. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των πολυωνύμων $Q(x)=\alpha^2x^3-\beta^2x$ και
$P(x)=5\alpha^2x^5+6\beta x^3-4\alpha x+10$ με το x – 1 είναι ίσα να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β.

13. Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+12x+\beta$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-3)^2$. Ποιο το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-3)^2$.

14. Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x+2$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$ και η διαίρεση του $P(x)$ με το $x+1$ δίνει υπόλοιπο ίσο με 12

15. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=2x^5-9x^4+18x^3-18x^2+8x-1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

16. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντες τα $x-2$ και $x+3$, να δείξετε ότι και το πολυώνυμο x^2+x-6 είναι παράγοντας του $P(x)$.

17. Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, ώστε το τριώνυμο x^2-5x+4 να διαιρεί το πολυώνυμο
$P(x)=x^4-3x^3+\mu x+\lambda$.

18. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β αν το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+4x+\beta$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)^2$.

19. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $(x-3)$ δίνει υπόλοιπο 8 και διαιρούμενο με $(x+2)$ δίνει υπόλοιπο -7. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-3)(x+2)$.

20. Οι διαιρέσεις ενός πολυωνύμου $P(x)$ με τα διώνυμα $\left(x+1\right)$ και $\left(x-2\right)$ δίνουν υπόλοιπα 2 και -4 αντίστοιχα. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)\ :\ \left(x^2-x-2\right)$.

21. Να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\lambda - \mu)x^3 + 2\lambda x^2 - 5x + 4$ να διαιρείτε με τη μεγαλύτερη δυνατή δύναμη του $(x-1)$.

22. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ με $P(0) = 2$, $P(1) = 1$ και $P(-2) = 10$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)\ :\ \left(x^3 + x^2 - 2x\right)$.

23. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το $\left(x+1\right)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha+\beta)x - 1$.

24. Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(1) = 2$ και $P(2x+1) = 2P(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\left(x-7\right)$.

25. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2\left(x-3\right)^{11} - \left(x-2\right)^{23} - x + 4$ έχει παράγοντες όλους του παράγοντες του $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

26. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε το πολυώνυμο
$P(x) = \alpha\left(x+3\right)^{17} + \beta\left(x+4\right)^{25} + x - 1$
να έχει παράγοντες όλους του παράγοντες του $Q(x) = x^2 + 7x + 12$.

27. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $2x^2 + 3$.

2.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ β) $4x^3 - 3x - 1 = 0$ γ) $2x^4 + 13x^3 + 28x^2 + 23x + 6 = 0$

2. Να βρεθεί ο ακέραιος k ώστε η εξίσωση $\left(3k^3+1\right)x^4 - (6k+4)x^3 + \left(7k^2+8\right)x - 9k = 0$ να έχει ρίζα τον αριθμό 1. Για την τιμή του k που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση.

3. Να βρείτε τα σημεία τομής του $x'x$ άξονα και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + \left(x+1\right)^2$. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση δεν έχει κανένα σημείο κάτω από τον άξονα $x'x$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$ β) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

γ) $x^3 + \frac{13}{12}x^2 - \frac{13}{12}x - 1 = 0$ δ) $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 + 41x - 6 = 0$

ε) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ στ) $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{100} + 2\alpha x + 2 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{Z}$, δεν έχει ακέραιες ρίζες.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 \le 0$ β) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 \ge 0$

γ) $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x + 1 < 0$ δ) $x^3 - x^2 - x - 2 \ge 0$

8. ΄Εστω το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Να προσδιοριστούν τα α, β ώστε το $x^2 + 2x - 3$ να είναι παράγοντας του $P(x)$.

2. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να λυθεί η ανισότητα $P(x) < 0$.

9. Αν για κάθε πραγματικό x ισχύει η σχέση : $\alpha(x+\beta)^2 + \gamma = 9x^2 + 72x + 128$ τότε :

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ.

β. Να λυθεί η ανίσωση : $9x^2 + 72x + 128 \ge 0$

11. Δίνονται τα πολυώνυμα :

$P(x) = 2x^3 - x^2 + x - \alpha^2 - \beta^2$ και $Q(x) = (1-\alpha)x^3 - (\beta+6)x^2 + 11x - 6$

1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η γραφική παράσταση του $P(x)$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Αν $\alpha = \beta = 0$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση του $Q(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

12. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + x + 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν τα δυο πολυώνυμα έχουν κοινό παράγοντα το $x^2 + 1$, τότε :

α. Να βρεθούν τα α, β.

β. Να λυθούν οι εξισώσεις $P(x) = 0$ και $Q(x) = 0$.

14. Να βρεθούν οι τιμές των α,β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = (\alpha x + \beta)(x^2 - 2)$.
΄Επειτα να λυθεί η ανίσωση: $P(x) \le 0$

15. Να βρεθούν οι τιμές των α,β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$ να έχει το μέγιστο δυνατό πλήθος ακεραίων ριζών.
΄Επειτα να λυθεί η ανίσωση: $P(x) > 0$.

16. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g όπου $f(x)=x^3+x^2+1$ και $g(x)=x^2+7x-5$.

17. Να λυθεί η εξίσωση $x^6-5x^2-6=0$.

18. ΄Εστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^3+\alpha x^2+\beta x+3$.
Αν είναι γνωστό ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον θετικό ημιάξονα Οx΄ σε δύο σημεία με ακέραιες τετμημένες να βρεθούν οι τιμές των α,β.
Σε ποιο διάστημα του x η C_f βρίσκεται κάτω από τον x΄x ;

2.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση : $\dfrac{x^2+1}{x-2}-3\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{10}{x(x-2)}$

2. Να λυθεί η εξίσωση : $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{2x-2}{x^2-1}-\dfrac{3(x-1)}{x^3-2x^2-x+2}=0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\sqrt{9x-2}=3x-2$ β) $\sqrt{x+3}=x+1$ γ) $5x-4\sqrt{x+11}=3x-6$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\sqrt{2x}+2\sqrt{x+2}=2$ β) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-19}=10$

5. Να λύσετε την εξίσωση : $(x-1)^{\frac{1}{2}}+6(x-1)^{\frac{1}{4}}=16$

6. Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x-2y=1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ x+\sqrt[3]{y^2}=5 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x+y-2\sqrt{xy}=16 \end{cases}$

7. Να λύσετε την εξίσωση : $2\eta\mu^8 x-9\eta\mu^6 x+14\eta\mu^4 x-9\eta\mu^2 x+2=0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\left(x^2+3x-2\right)^6-9\left(x^2+3x-2\right)^3+8=0$ β) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2-5\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+6=0$

γ) $(x+2)^8-3(x+2)^4-4=0$ δ) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3}{x^2-1}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις (αντίστροφες) :

α) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ β) $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$

Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=x-3$.

Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{3}{\eta\mu^2 x}-5\eta\mu x=\dfrac{4}{\eta\mu x}+2\sigma\upsilon\nu^2 x$.

10. Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$.

11. Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-12=0$.

12. Να λύσετε την εξίσωση : $x^6-4x^4-x^2+4=0$.

13. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2+x=\sqrt{3x^2+3x-2}$.

14. Να λύσετε την εξίσωση : $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

15. Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=3$

16. Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{x-8}=x-10$

17. Να λύσετε την ανίσωση : $\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{x^2-3x+2}{x}\geq\dfrac{2}{x^2-x}$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\dfrac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)^x$ είναι :

α. Ορισμένη στο $\mathbb{R}$ β. Γνησίως αύξουσα. γ. Γνησίως φθίνουσα. δ. Σταθερή

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

1. $27^{4x}=9^{x+1}$
2. $2\cdot4^x-5\cdot2^x+2=0$
3. $7\cdot3^{x+1}+5^{x+3}=3^{x+4}+5^{x+2}$
4. $5\cdot9^x-3\cdot6^x-2\cdot4^x=0$
5. $\left(x^2-5x+5\right)^{x+2}=1$
6. $3^{x-1}-\dfrac{4}{3}\sqrt{3^x}=-1$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α. $2^{x^2-3x}=4^{x-2}$ β. $3^{x+3}+5\cdot3^{x+1}+3^x-3^{x-1}=128$ γ. $4^x+2^x=20$

δ. $3^x+3^{-x}=\dfrac{10}{3}$ ε. $3\cdot2^{x-2}+6\cdot5^{x-1}=2^{x+1}+5^x$ στ. $7\cdot3^{2x-1}+2\cdot9^{2x-3}=207$

ζ. $(x+2)^{x^2-4}=1$ η. $4\cdot9^x-7\cdot12^x+3\cdot16^x=0$ θ. $2^{\eta\mu x}+8\cdot2^{-\eta\mu x}=6$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α. $2^{x-1}+2^x+2^{x+2}+2^{x+3}=108$ β. $\left(x^2-5x+5\right)^{x+2}=1$

γ. $5^{1-x}-2\cdot5^{-x}+4\cdot5^{2-x}=515$ δ. $3^{\eta\mu2x-\sigma\upsilon\nu x}=9^{1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}}$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εκθετικές ανισώσεις

α. $2^x\geq\dfrac{1}{16}$ β. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x-1}<\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ γ. $32^x\leq16^{1-x}$ δ. $2^{x+3}+2^{x+1}>48+2^{x+2}$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις :

α. $4^x-6\cdot2^x+8<0$ β. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$ γ. $6\cdot9^x-13\cdot6^x+6\cdot4^x<0$

7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

α. $\begin{cases} 2\cdot 2^{2x+y}=\frac{1}{8}4^{x-y} \\ 3^{2x+1}=81\cdot 3^{4y-2} \end{cases}$ β. $\begin{cases} 3^{x+1}-2^{y}=8 \\ 3^{x-1}+2^{y+1}=3 \end{cases}$ γ. $\begin{cases} 3^{x}\cdot 4^{y}=36 \\ 4^{x}\cdot 3^{y}=48 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} x^{y}=y^{x} \\ x=y^{2} \end{cases}$ ε. $\begin{cases} 3^{x}\cdot 5^{y}=75 \\ 3^{y}\cdot 5^{x}=45 \end{cases}$ στ. $\begin{cases} 2^{x-1}\cdot 4^{y}=1 \\ 3^{x}\cdot 3^{y-1}=9 \end{cases}$

ζ. $\begin{cases} 3^{x}-5^{y}=4 \\ 9\cdot 3^{-x}+5^{y}=6 \end{cases}$ η. $\begin{cases} 7^{x}=16y \\ 4^{x}=49y \end{cases}$ θ. $\begin{cases} 3^{x}-5^{y}=4 \\ 5^{y}+9\cdot 3^{-x}=6 \end{cases}$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τους παρακάτω αριθμούς :

α. $3^{1+2\log_3 2}$ β. $10^{2-\frac{1}{2}\log 5}$ γ. $\left(\frac{1}{e}\right)^{2-\ln\sqrt{2}}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $3^{2x-1}=5$ β. $2^{2^{x}}=3$

3. Να δείξετε ότι : $\log\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+...+\log\left(1-\frac{1}{v^2}\right)=\log\left(\frac{v+1}{2v}\right)$

4. Να δείξετε ότι : $\ln(10e)+\log(10e)=\ln(10e)\cdot\log(10e)$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α. $f(x)=\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ β. $g(x)=\frac{1-\ln(3-x)}{1+\ln(1+x)}$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

α. $A=\log_2 8+\log_3\sqrt[3]{27}-\log_2 4+\log_2\sqrt[5]{32}$ β. $B=100^{1+\frac{1}{3}\log 8}$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $\ln(x+3)+\ln(x+5)=\ln 15$

β. $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$

γ. $\frac{1}{2}\ln(3x-1)+\frac{1}{2}\ln(8x-2)=\ln(4x-1)$

δ. $\frac{1}{2}\log\sqrt{x^2+x-5}=\log x+\log\frac{1}{x}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $2+\log\sqrt{1+x}+3\log\sqrt{1-x}=\log\sqrt{1-x^2}$

β. $3\ln(x+1)-\ln(x-1)=\ln\left(x^2-1\right)+2\ln 3$

γ. $\dfrac{4}{5+\log x}+\dfrac{3}{9-\log x}=1$

δ. $\ln\left(3^{2x}+439\right)-\ln 140=\ln 50$ ε. $x^{\log\sqrt{\frac{x}{10}}}=10$

9. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases}\log x+\log y=\dfrac{3}{2}\\ \log x-\log y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ β. $\begin{cases}\log x^3+\log y^2=1\\ \log x^2-\log y=-1\end{cases}$

γ. $\begin{cases}\log_2(x+3)-\log_2(y+2)=1\\ 3^x+3^y=30\end{cases}$ δ. $\begin{cases}7\left(\log_y x+\log_x y\right)=50\\ xy=25\end{cases}$

ε. $\begin{cases}x^y=8\\ x^{\frac{y+1}{y-1}}=4\end{cases}$ στ. $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=72\\ 3^x\cdot 5^y=675\end{cases}$

ζ. $\begin{cases}x^{\frac{2}{y}}-12x^{\frac{1}{y}}+20=0\\ y=\log x-2\end{cases}$ η. $\begin{cases}x^{\log y}=16\\ y^{\frac{1}{\log x}}=2\end{cases}$

θ. $\begin{cases}2\log_x y+2\log_y x=-5\\ xy=e\end{cases}$ ι. $\begin{cases}5^x-2^y=1\\ x\log 5+y\log 2=\log 20\end{cases}$

10. α. Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει : $2^{\log x}=x^{\log 2}$.
β. Να λύσετε την εξίσωση : $2^{2\log x}-8=2\cdot x^{\log 2}$.

11. Να βρείτε τον θετικό x ώστε να ισχύει : $\log x+\log x^3+\log x^5+...+\log x^{2\nu-1}=2\nu^2$

12. α. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases}x^{\log y}=10\\ \log\sqrt{xy}=1\end{cases}$.
β. Αν οι λύσεις του συστήματος είναι ρίζες της εξίσωσης
$\log\left[\log\left(x^2+x\log\theta-110\right)\right]=0$, να υπολογίσετε τον θετικό αριθμό θ.

13. Να λύσετε τις ανισώσεις :
α. $\log_{0,2}\left(3^x+2\right)\le x\log_{0,2}3$ β. $\log^2 x-4\log x+3\le 0$ γ. $x^{\log x}>1$

14. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\ln 5^x\right)$.
α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση είναι άρτια.
γ) Να λυθεί στο διάστημα $(0\ ,\ 2\pi)$ η εξίσωση: $f(x)=0$.

15. α. Να δείξετε ότι : $x^{\log_5 2}=2^{\log_5 x}$.
β. Να λυθεί η εξίσωση : $3\cdot x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$.

16. Να λυθεί η εξίσωση: $\log\left(x^2+17x\right)=1+\log\left(x+3\right)$

17. Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{3+\ln x}{3-\ln x}+\dfrac{2-\ln x}{\ln x}=5$

18. Να λυθεί η εξίσωση: $\ln\left(2e^x+3^x\right)=x+\ln 5$

19. Να λυθεί η εξίσωση: $x^{5\ln x}=e^3\cdot x$

20. Να λυθεί η εξίσωση: α) $\text{συν}3^x=0$ β) $\text{συν}e^x=-1$

21. Να λυθεί η εξίσωση: α) $x^{\ln\sqrt{x}}=e^8$ β) $\dfrac{x^{\ln x}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{e}$

22. Να λυθεί το σύστημα: α) $\begin{cases} 3^x-2^y=1 \\ x\ln 3+y\ln 2=\ln 72 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \ln\left(x\cdot y\right)=4\ln 2 \\ \ln x\cdot\ln y=3\ln^2 2 \end{cases}$

23. Να λυθεί η εξίσωση : $\ln^3 x-3\ln x+2=0$

24. Να λυθεί η ανίσωση : α) $2\ln^2 x-5\ln x+2\ge 0$ β) $\dfrac{\ln x}{1-\ln x}+\dfrac{4+\ln x}{\ln x}\le 1$

25. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :
α) $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$ β) $g(x)=\sqrt{1-\ln^2 x}$ γ) $h(x)=\sqrt{2-\ln x}-\sqrt{1+\ln x}$

26. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :
α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\ln x}}{\ln x}$ β) $g(x)=\dfrac{\ln x}{4-\ln^2 x}$ γ) $h(x)=\ln\left(2-\ln x\right)$

27. Να βρεθεί η τιμή του $x\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου οι αριθμοί : $x^{\ln x}$, $\sqrt[3]{e^7\cdot x^2}$, x^5.

28. Να βρεθεί η τιμή του $x\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου οι αριθμοί : $\ln 2$, $\ln\left(3^x-1\right)$, $\ln\left(3^{x+1}+5\right)$