2ο ΓΕΛ ΣΥΚΕΩΝ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2013-2014

Επιμέλεια: ΧΑΛΑΤΖΙΑΝ ΠΑΥΛΟΣ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Πολυώνυμα
Ορισμοί :

- **Μονώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν}, όπου

  $\alpha \in \mathbb{R}$: συντελεστής
  x : μεταβλητή
  $\nu \in N^{*}$: εκθέτης του x

Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα : $4x^3,\ -\frac{3}{5}x^2,\ \sqrt{2}x^5,\ 7,\ -\frac{3}{8},\ 0$

- **Πολυώνυμο του** x λέμε κάθε παράσταση της μορφής :

  $\alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου

  $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu} \in \mathbb{R}$: συντελεστές
  x : μεταβλητή
  $\nu \in N^{*}$: εκθέτης του x

Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu}, \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}, \ldots, \alpha_1 x, \alpha_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου, ειδικότερα ο α_0 λέγεται **σταθερός όρος.**

Τα πολυώνυμα της μορφής α_0 λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**.

Το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

- Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε συνήθως με : $P(x), Q(x), A(x), B(x), f(x), \ldots$

- **Βαθμός** του πολυωνύμου $P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_{\nu} \neq 0$, ονομάζεται ο μεγαλύτερος εκθέτης του x εφόσον ο συντελεστής του x είναι διάφορος του μηδέν. Άρα ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι ο θετικός ακέραιος ν.
- Τα σταθερά πολυώνυμα α_0 έχουν βαθμό 0.
- Το μηδενικό πολυώνυμο 0, δεν έχει βαθμό.

- Δυο πολυώνυμα είναι **ίσα**, όταν είναι του **ιδίου βαθμού** και **οι συντελεστές όλων των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι**.

  Έστω δυο πολυώνυμα

  $P(x) = \alpha_{\mu}x^{\mu} + \alpha_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots \alpha_{\nu}x^{\nu} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και

$Q(x) = \beta_{\nu}x^{\nu} + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$, με $\mu \geq \nu$, θα λέμε ότι είναι **ίσα** όταν :

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{\nu} = \beta_{\nu} \quad \text{και}$$
$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \ldots = \alpha_{\mu} = 0$$

- **Αριθμητική τιμή** του πολυωνύμου $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, για $x=\rho$, λέγεται ο αριθμός $P(\rho)=\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0$.
- Αν $P(\rho)=0$ τότε ο αριθμός ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου $P(x)$.

Πρόταση 1 : Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και αντίστροφα.
Πρόταση 2 : Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x και αντίστροφα.

Πράξεις με πολυώνυμα

Πρόσθεση - Αφαίρεση

- Προσθέτουμε ή αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.
- Αν το άθροισμα ή η διαφορά δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο τότε ο βαθμός του είναι μικρότερος ή ίσος από το μέγιστο βαθμό των δυο πολυωνύμων.

Πολλαπλασιασμός

- Πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.
- Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Λυμένα παραδείγματα:

1	**Για τις διάφορες τιμές του $m\in\mathbb{R}$, να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου** $P(x)=\left(m^3-9m\right)x^3+\left(m^2-3m\right)x^2+(m-3)x+9-m^2$.

ΛΥΣΗ:

Διακρίνω περιπτώσεις για τον συντελεστή της μεγαλύτερης δύναμης του x.

I) $m^3-9m\neq 0 \Leftrightarrow m\left(m^2-9\right)\neq 0 \Leftrightarrow m(m-3)(m+3)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -3 \\ m\neq 0 \\ m\neq 3 \end{cases}$

Τότε το $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού.

II) $m^3-9m=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \Rightarrow P(x)=18x^2-6x,\ 2^{ου}\text{ βαθμού} \\ m=0 \Rightarrow P(x)=-3x+9,\ 1^{ου}\text{ βαθμού} \\ m=3 \Rightarrow P(x)\equiv 0,\ \text{Δεν ορίζεται βαθμός} \end{cases}$

2	**Για ποια τιμή του** $\alpha \in \mathbb{R}$**, τα πολυώνυμα** $P(x) = 5\alpha x^3 - 2x + \alpha$ **και** $Q(x) = (\alpha^2+4)x^3 + (\alpha^2-1)x^2 + (\alpha^2-3\alpha)x + 1$ **είναι ίσα.**

ΛΥΣΗ:

Θα πρέπει οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων να είναι ένας προς έναν ίσοι.

Άρα
$$\begin{cases} \alpha^2+4=5\alpha \\ \alpha^2-1=0 \\ \alpha^2-3\alpha=-2 \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-5\alpha+4=0 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=4 \\ \alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=-1 \\ \alpha^2-3\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=2 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

Επομένως η κοινή λύση είναι $\alpha = 1$

3	**Δίνεται το πολυώνυμο** $P(x) = (\alpha^2-6\alpha+8)x^3 + (\beta^2-1)x^2 + (4-\alpha)x + 1 + \beta$**. Για ποιες τιμές των α, β** $\in \mathbb{R}$ **το πολυώνυμο είναι το μηδενικό.**

ΛΥΣΗ:

Για να είναι το $P(x)$ το μηδενικό πολυώνυμο θα πρέπει όλοι οι συντελεστές του να είναι ένας προς έναν ίσοι με 0.

Επομένως
$$\begin{cases} \alpha^2-6\alpha+8=0 \\ 4-\alpha=0 \\ \beta^2-1=0 \\ 1+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \text{ ή } \alpha=4 \\ \alpha=4 \\ \beta=1 \text{ ή } \beta=-1 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

Τελικά η κοινή λύση είναι $\alpha = 4$, $\beta = -1$

4	**Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x = 2 και για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **ισχύει** $P(2x+1) = 3P(x) - 5$ **(1)** **Να βρεθεί η αριθμητική τιμή P(11).**

ΛΥΣΗ:

Αφού το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x = 2 έχουμε ότι $P(2) = 0$

Από τη σχέση (1) για x = 2 έχουμε: $P(5) = 3P(2) - 5 \Leftrightarrow P(5) = -5$

Από τη σχέση (1) για x = 5 έχουμε: $P(11) = 3P(5) - 5 \Leftrightarrow P(11) = 3(-5) - 5 = -20$

5	**Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x = 3 να βρεθεί μια ρίζα του πολυωνύμου** $Q(x) = P(5x+8)$ **(1)**

ΛΥΣΗ:

Αφού το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x = 3 έχουμε ότι $P(3) = 0$

Παρατηρούμε ότι για x = -1 στη σχέση (1) έχουμε:

$Q(-1) = P(5(-1)+8) \Leftrightarrow Q(-1) = P(3) = 0$

Άρα το x = -1 είναι ρίζα του Q(x)

6	Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) 2^{ου} βαθμού με ρίζες το -1 και το 2 και αριθμητική τιμή -2 για x = 1.

ΛΥΣΗ:

Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ η μορφή του ζητούμενου πολυωνύμου.
Αφού το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x = -1 έχουμε ότι:

$P(-1) = 0 \Leftrightarrow \alpha(-1)^2 + \beta(-1) + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + \gamma = 0$ (1)

Αφού το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x = 2 έχουμε ότι:

$P(2) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ (2)

Αφού η αριθμητική του τιμή για x = 1 είναι -2 έχουμε ότι:

$P(1) = -2 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -2$ (3)

Από τις σχέσεις (1) , (2) , (3) λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι:
$\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι $P(x) = x^2 - x - 2$

7	Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \left(x^2 + 2\right)^3 + \left(x^2 + x - 2\right)^5$ Ποιος ο βαθμός του πολυωνύμου; Να βρεθεί ο σταθερός του όρος και το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου.

ΛΥΣΗ:

Ο βαθμός του πολυωνύμου μετά από την ανάπτυξη των ταυτοτήτων είναι
$\deg\left(P(x)\right) = 10$

Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου ισούται με την αριθμητική τιμή P(0)

Άρα έχουμε: $\alpha_0 = P(0) = \left(0^2 + 2\right)^3 + \left(0^2 + 0 - 2\right)^5 = 8 + (-32) = -24$

Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου ισούται με την αριθμητική τιμή P(1)

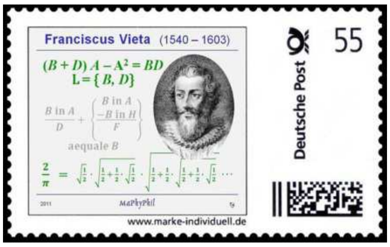
Άρα έχουμε: $\alpha_{10} + \alpha_9 + ... + \alpha_0 = P(1) = \left(1^2 + 2\right)^3 + \left(1^2 + 1 - 2\right)^5 = 27$

ΣΧΟΛΙΟ : Όταν ένα πολυώνυμο βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή για να βρούμε :
- Το σταθερό του όρο θέτουμε όπου $x = 0$ και έχουμε : $\alpha_0 = P(0)$.
- Το άθροισμα των συντελεστών του θέτουμε όπου $x = 1$ και έχουμε :
  $\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + ... + \alpha_1 + \alpha_0 = P(1)$

8	Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + x - 2$ Να βρεθεί το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x) - P(x-1)$ Ποιες είναι οι ρίζες του Q(x);

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $Q(x) = \left[(2x)^2 + 2x - 2\right] - \left[(x-1)^2 + (x-1) - 2\right] \Leftrightarrow$



$$Q(x)=\left(4x^2+2x-2\right)-\left[(x^2-2x+1)+(x-1)-2\right]\Leftrightarrow$$
$$Q(x)=4x^2+2x-2-x^2+2x-1-x+1+2\Leftrightarrow$$
$$Q(x)=3x^2+3x$$

Οι ρίζες του Q(x) βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης:

$$Q(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+3x=0\Leftrightarrow 3x(x+1)=0\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=0\Leftrightarrow x=0 \\ x+1=0\Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$$

9	Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) $2^{ου}$ βαθμού τέτοιο ώστε να ισχύουν: $P(0)=0$ και $P(x+1)-P(x)=x$. Έπειτα να δειχθεί ότι: $1+2+3+...+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

ΛΥΣΗ:

Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$

Αφού $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$

$P(0)=0\Leftrightarrow \alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma=0\Leftrightarrow \gamma=0$

Άρα $P(x)=\alpha x^2+\beta x$

Επειδή $P(x+1)-P(x)=x\Leftrightarrow\left[\alpha(x+1)^2+\beta(x+1)\right]-\left(\alpha x^2+\beta x\right)=x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha x^2+2\alpha x+\alpha+\beta x+\beta-\alpha x^2-\beta x=x\Leftrightarrow 2\alpha x+\alpha+\beta=x$

Από την ισότητα πολυωνύμων έχουμε :

$$2\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}\ \text{και}\ \alpha+\beta=0\Leftrightarrow\beta=-\frac{1}{2}$$

Άρα $P(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}x(x-1)$

Αν στη σχέση

$P(x+1)-P(x)=x$ θέσουμε όπου x διαδοχικά τους αριθμούς 1,2,3,….,ν-1,ν

έχουμε :

Για x = 1 $\quad P(2)-P(1)=1$

Για x = 2 $\quad P(3)-P(2)=2$

Για x = 3 $\quad P(4)-P(3)=3$

………………………………

Για x = ν-1 $\quad P(\nu)-P(\nu-1)=\nu-1$

Για x = ν $\quad P(\nu+1)-P(\nu)=\nu$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$P(\nu+1)-P(1)=1+2+3+...+\nu$$

Όμως $P(1)=0$ και $P(\nu+1)=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

Άρα $\quad 1+2+3+...+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει :

$[P(x)]^2 = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

2. Να γραφεί το πολυώνυμο $P(x) = 3x^2 - 7x + 5$ στη μορφή :

$P(x) = \alpha(x-1)(x+1) + \beta x(x-1) + \gamma(x-2)(x+3)$

4. Για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου

$P(x) = (m^3 - 7m^2 + 10m)x^3 - 2(m^2 - 2)x + 3$.

5. Για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α , β και γ τα πολυώνυμα

$P(x) = (\alpha+\beta)x^2 + (\beta - 2\gamma)x + 4$ και

$Q(x) = (\alpha+\beta-\gamma)x^3 + 3x^2 - (\alpha+\gamma)x + 2\alpha + \beta$ είναι ίσα;

6. α) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$, $3^{\text{ου}}$ βαθμού, τέτοιο ώστε να ισχύει $P(0) = 0$ και $P(x) - P(x-1) = x^2$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα : $S(\nu) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

7. α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x+1}$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα : $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{\nu(\nu+1)}$.

10. Να βρεθεί ο σταθερός όρος και το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x) = (x^2 - x + 1)^{2007} + (2x^2 + x - 2)^{2006}$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + x + 1$. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου $P(P(x)) - x^4$.

12. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $P(x-1) = x^2 - x + 3$

13. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 2, να βρεθεί μια ρίζα του πολυωνύμου $Q(x) = P(3x - 10)$.

14. Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ έχει ρίζα τον αριθμό $\rho \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $P(\alpha_0) = 0$, να δείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x) = P(P(P(x)))$.

15. Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(1)=0$ και $P(3x-1)=2P(x)+4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το $P(14)$.

16. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α το πολυώνυμο $P(x)=\left(\alpha^2-1\right)x^3+\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)x^2+\left(\alpha^2-5\alpha+4\right)x+\left(\alpha^3-1\right)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο;

17. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) τέτοιο ώστε: $\left[P(x)\right]^2+3P(x)+3x=9x^2-2$

Διαίρεση πολυωνύμων

Θεώρημα (ταυτότητα της διαίρεσης): Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)\neq 0$, υπάρχει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, Τέτοια ώστε :

$$\Delta(x)=\delta(x)\,\pi(x)+\upsilon(x)$$

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

- Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο.
- Αν το υπόλοιπο $\upsilon(x)=0$, τότε η διαίρεση είναι **τέλεια** και λέμε ότι το $\delta(x)$ **διαιρεί** το $\Delta(x)$ ή το $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** ή **διαιρέτης** του $\Delta(x)$.

Θεώρημα 1 : Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$, είναι δηλαδή

$$\upsilon=P(\rho)$$

και η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται :

$$P(x)=(x-\rho)\,\pi(x)+P(\rho)$$

Θεώρημα 2 : Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Μέθοδοι υπολογισμού του πηλίκου και του υπόλοιπου

- **Με τον αλγόριθμο της διαίρεσης**

Λυμένο παράδειγμα:

10 — **Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου $\Delta(x)=4x^4+3x^3+x^2-3x+1$ με το πολυώνυμο $\delta(x)=x^2+2$. Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης.**

ΛΥΣΗ:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4+3x^3+x^2-3x+1 & x^2+2 \\ \hline
-4x^4 \quad\quad -8x^2 & 4x^2+3x-7 \\ \hline
\quad 3x^3-7x^2-3x+1 & \\
\quad -3x^3 \quad\quad -6x & \\ \hline
\quad\quad -7x^2-9x+1 & \\
\quad\quad 7x^2 \quad\quad +14 & \\ \hline
\quad\quad\quad -9x+15 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι :

$$4x^4+3x^3+x^2-3x+1=\left(x^2+2\right)\left(4x^2+3x-7\right)+\left(-9x+15\right)$$

- **Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών**

Από την διαίρεση $\Delta(x)=\delta(x)\,\pi(x)+\upsilon(x)$ και τον ορισμό της ισότητας δυο πολυωνύμων προκύπτει ότι ο βαθμός του πηλίκου $\eth(x)$ είναι ίσος με την διαφορά των βαθμών του διαιρέτη $\delta(x)$ από τον διαιρετέο $\Delta(x)$ και ότι ο βαθμός του υπολοίπου $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη $\delta(x)$ ή το υπόλοιπο είναι $\upsilon(x)=0$.

Επομένως

* βαθμός $\pi(x)$ =βαθμό $\Delta(x)$ - βαθμό $\delta(x)$

* βαθμός $\upsilon(x)$ <βαθμό $\delta(x)$ ή $\upsilon(x)=0$

Λυμένο παράδειγμα:

11	**Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου** $\Delta(x)=4x^4+3x^3+x^2-3x+1$ **με το πολυώνυμο** $\delta(x)=x^2+2$**.**

ΛΥΣΗ:

- βαθμός $\pi(x)$ =βαθμό $\Delta(x)$ - βαθμό $\delta(x)$ =4 - 2=2.

Άρα το πηλίκο είναι της μορφής $\pi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

- βαθμός $\upsilon(x)$ <βαθμό $\delta(x)$ =2. Άρα το υπόλοιπο είναι 1^{ου} βαθμού το πολύ.

Άρα το υπόλοιπο είναι της μορφής $\upsilon(x)=kx+\lambda$.

όπου $\alpha,\beta,\gamma,k,\lambda\in\mathbb{R}$.

Από την ταυτότητα της διαίρεσης : $\Delta(x)=\delta(x)\,\pi(x)+\upsilon(x)$

προκύπτει ότι :

$$4x^4+3x^3+x^2-3x+1=\left(x^2+2\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)+kx+\lambda \Leftrightarrow$$

$$4x^4+3x^3+x^2-3x+1=\alpha x^4+\beta x^3+\left(\gamma+2\alpha\right)x^2+\left(2\beta+k\right)x+2\gamma+\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=3\\ \gamma+2\alpha=1\\ 2\beta+k=-3\\ 2\gamma+\lambda=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=3\\ \gamma=-7\\ k=-9\\ \lambda=15\end{cases}$$

Επομένως $\pi(x)=4x^2+3x-7$ και $υ(x)=-9x+15$.

- **Σχήμα Horner :** Το χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να κάνουμε διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ μ' ένα πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού της μορφής $x-ρ$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-ρ$ είναι $υ=P(ρ)$.

Λυμένα παραδείγματα:

12 | **Αν $P(x)=3x^4+40x^3+12x^2-10x+2039$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=-13$.**

ΛΥΣΗ:

Θεωρώ την διαίρεση του $P(x)$ με το $x+13$. Το υπόλοιπο είναι το $υ=P(-13)$.

$P(x)$					$x-ρ$
3	40	12	-10	2039	ρ=-13
↓	-39	-13	13	- 39	
3	1	-1	3	2000	
$π(x)$				$υ=P(ρ)$	

13 | **Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $(x-3)$ δίνει υπόλοιπο 7 και διαιρούμενο με $(x+1)$ δίνει υπόλοιπο -1. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-3)(x+1)$.**

ΛΥΣΗ:

Η διαίρεση $P(x):(x-3)$ δίνει υπόλοιπο $υ=P(3)=7$ και αντίστοιχα
η διαίρεση $P(x):(x+1)$ δίνει υπόλοιπο $υ=P(-1)=-1$.
Θεωρώ τη διαίρεση

$$P(x):(x-3)\cdot(x+1)$$

η οποία δίνει υπόλοιπο $υ(x)$, με βαθμ.$υ(x)\le 1$ ή αν η διαίρεση είναι τέλεια το υπόλοιπο δεν έχει βαθμό. Σε κάθε περίπτωση η μορφή του υπολοίπου θα είναι :

$$υ(x)=kx+λ\ ,\ k,λ\in\mathbb{R}.$$

Άρα η εξίσωση της παραπάνω διαίρεσης είναι :

$$P(x)=(x-3)\ (x+1)\ π(x)+kx+λ \quad (1)$$

Για $x=3$ η (1) γίνεται : $P(3)=(3-3)\ (3+1)\ π(3)+3k+λ \Leftrightarrow\ 7=3k+λ$ (2)

Για $x=-1$ η (1) γίνεται : $P(-1)=(-1-3)\ (-1+1)\ π(3)-k+λ \Leftrightarrow\ -1=-k+λ$ (3)

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) κι έχουμε :

$$\begin{cases} 3k+\lambda=7 \\ -k+\lambda=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

Επομένως το υπόλοιπο είναι : $\upsilon(x)=2x+1$.

14	**Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντες τα $x-\alpha$ και $x-\beta$, με $\alpha\neq\beta$, να δείξετε ότι και το $(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.**

ΛΥΣΗ:

Εφόσον τα πολυώνυμα $x-\alpha$ και $x-\beta$ είναι παράγοντες του $P(x)$ άρα θα έχουμε : $P(\alpha)=0$ και $P(\beta)=0$.

Θεωρούμε τη διαίρεση

$P(x):(x-\alpha)(x-\beta)$

η οποία θα έχει πηλίκο $\pi(x)$ και υπόλοιπο της μορφής

$\upsilon(x)=kx+\lambda$, με $k,\lambda\in\mathbb{R}$

διότι ο διαιρέτης είναι $2^{ου}$ βαθμού και η ταυτότητα της διαίρεσης θα είναι :

$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot\pi(x)+kx+\lambda \quad (1)$

Για $x=\alpha$ η (1) γίνεται : $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)\pi(\alpha)+k\alpha+\lambda \Leftrightarrow$

$0=k\alpha+\lambda \quad (2)$

Για $x=\beta$ η (1) γίνεται : $P(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\beta)\pi(\alpha)+k\beta+\lambda \Leftrightarrow$

$0=k\beta+\lambda \quad (3)$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) έχουμε με αφαίρεση κατά μέλη :

$k\alpha-k\beta=0 \Leftrightarrow k(\alpha-\beta)=0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow} k=0$ και λ=0

Άρα $\upsilon(x)=0x+0$ και επομένως η διαίρεση $P(x):(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι τέλεια .

15	**Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $f(x)=x^2-2x-3$ δίνει υπόλοιπο $3x-1$, να βρεθούν τα υπόλοιπα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ και το $x-3$.**

ΛΥΣΗ:

Παρατηρούμε ότι $f(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το f(x) έχουμε

$P(x)=(x+1)(x-3)\pi(x)+(3x-1) \quad (1)$

- Για x = -1 από την (1) έχουμε:

$$P(-1)=(-1+1)(-1-3)\pi(-1)+(3(-1)-1) \Leftrightarrow P(-1)=-4$$

Άρα $\upsilon\left[P(x):(x+1)\right]=P(-1)=-4$

- Για x = 3 από την (1) έχουμε:

$$P(3)=(3+1)(3-3)\pi(3)+(3\cdot3-1) \Leftrightarrow P(3)=8$$

Άρα $\upsilon\left[P(x):(x-3)\right]=P(3)=8$

16	**Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο** $P(x)=(x-1)^{\nu}+(x-2)^{2\nu}-1$, $\nu\in\mathbb{N}^{*}$ **διαιρείται (τέλεια) με το** $f(x)=x^2-3x+2$ **.**

ΛΥΣΗ:

Παρατηρούμε ότι $f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

- Επειδή $P(1)=(1-1)^{\nu}+(1-2)^{2\nu}-1=(-1)^{2\nu}-1=0$ το 1 είναι ρίζα του P(x) , άρα το x-1 είναι παράγοντας του P(x).
- Επειδή $P(2)=(2-1)^{\nu}+(2-2)^{2\nu}-1=1^{\nu}-1=0$ το 2 είναι ρίζα του P(x) , άρα το x-2 είναι παράγοντας του P(x).

Αφού x-1 και x-2 είναι παράγοντες του P(x) άρα και το γινόμενό τους θα είναι παράγοντας του (βλέπε παράδειγμα 14).

Άρα το P(x) διαιρείται (τέλεια) με το $f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

17	**Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο** $P(x)=2x^8+5x^6+2007$ **δεν έχει παράγοντες της μορφής x – ρ όπου** $\rho\in\mathbb{R}$ **.**

ΛΥΣΗ:

Έστω ότι υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε το x – ρ να είναι παράγοντας του P(x).

Τότε θα ήταν το ρ ρίζα του P(x) δηλαδή P(ρ) = 0.

Όμως $P(\rho)=2\rho^8+5\rho^6+2007>0$ για κάθε $\rho\in\mathbb{R}$

Άρα καταλήξαμε σε άτοπο , άρα το πολυώνυμο δε μπορεί να έχει παράγοντες της μορφής x – ρ.

ΣΧΟΛΙΟ: Όταν όλοι οι όροι ενός πολυωνύμου είναι μη αρνητικοί αριθμοί και ο σταθερός του όρος καθαρά θετικός αριθμός (δηλαδή για κάθε τιμή της μεταβλητής το πολυώνυμο είναι καθαρά θετικός αριθμός) τότε το πολυώνυμο δε μπορεί να έχει πραγματικές ρίζες , άρα και παράγοντες της μορφής x – ρ.

Όμοια και για τα πολυώνυμα τα οποία για κάθε τιμή της μεταβλητής x η τιμή του είναι καθαρά θετικός αριθμός, π.χ το $P(x)=-2x^6-x^2-1$

18	**Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο** $P(x)=-3(x+1)^{21}+4(x+2)^{20}-x-5$ **έχει παράγοντες όλους του παράγοντες του** $Q(x)=x^2+3x+2$**.**

ΛΥΣΗ:

Επειδή $Q(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ οι παράγοντες του Q(x) είναι το x +1 και το x +2. Για να είναι αυτοί και παράγοντες του P(x) πρέπει το –1 και το –2 να είναι ρίζες του P(x).

Πράγματι

$$P(-1)=-3(-1+1)^{21}+4(-1+2)^{20}-(-1)-5=4-4=0$$

και

$$P(-2)=-3(-2+1)^{21}+4(-2+2)^{20}-(-2)-5=3-3=0$$

ΣΧΟΛΙΟ: Αν όλοι οι παράγοντες ενός πολυωνύμου Q(x) είναι της μορφής x – ρ (πρώτου βαθμού) διαφορετικοί όλοι μεταξύ τους , τότε για να δείξω ότι είναι και παράγοντες ενός άλλου πολυωνύμου P(x) αρκεί να δείξω ότι οι ρίζες όλων αυτών των παραγόντων είναι και ρίζες του P(x).

20

Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+12x+\beta$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-3)^2$. Ποιο το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-3)^2$.

ΛΥΣΗ:

Εφόσον $(x-3)^2$ παράγοντας του $P(x)$, τότε

$$P(x)=(x-3)^2\,\pi(x)\Leftrightarrow$$

$$P(x)=(x-3)\underbrace{(x-3)\pi(x)}_{Q(x)}\cdot \quad (1)$$

Άρα η διαίρεση

$P(x):(x-3)$

δίνει πηλίκο $Q(x)$, υπόλοιπο $\upsilon=P(3)=0$ και ισχύει $P(x)=(x-3)\,Q(x)$ (2)

Λόγω της (1) όμως ισχύει ότι : $Q(x)=(x-3)\,\pi(x)$ (3).

Άρα $Q(3)=0$. (4)

Θεωρώ τη διαίρεση $P(x):(x-3)$ (σχήμα Horner).

$P(x)$				$x-\rho$
2	α	12	β	ρ=3
↓	6	3α+18	9α+90	
2	α+6	3α+30	9α+β+90	

$Q(x)$ $\qquad \upsilon=P(3)=9\alpha+\beta+90=0$ (5)

Επομένως $Q(x)=2x^2+(\alpha+6)x+3\alpha+30$.

Από την (4) έχουμε :

$$Q(3)=0\Leftrightarrow 2\cdot 3^2+(\alpha+6)\cdot 3+3\alpha+30=0\Leftrightarrow$$

$$18+3\alpha+18+3\alpha+30=0\Leftrightarrow 6\alpha=-66\Leftrightarrow \alpha=-11$$

Από τη (5) έχουμε :

$$9\alpha+\beta+90=0\overset{\alpha=-11}{\Leftrightarrow}-99+\beta+90=0\Leftrightarrow \beta=9$$

Επομένως $Q(x)=2x^2-5x-3$. Η διαίρεση $Q(x):(x-3)$ δίνει πηλίκο το $\pi(x)$.
Άρα

$$\begin{array}{rr|l}
Q(x)=2x^2-5x-3 & & x-3 \\ \cline{3-3}
-2x^2+6x & & 2x+1 \\ \cline{1-1}
x-3 & & \\
-x+3 & & \\ \cline{1-1}
0 & &
\end{array}$$

Άρα $\pi(x)=2x+1$

21	**Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x+2$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$ και η διαίρεση του $P(x)$ με το $x+1$ δίνει υπόλοιπο ίσο με 12.**

ΛΥΣΗ:

Εφόσον το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ άρα

$P(1)=0\Leftrightarrow$

$1^4+\alpha 1^3+(\beta-1)1^2-3\cdot 1+2=0\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta-1-3+2=0\Leftrightarrow \alpha+\beta=1 \quad (1)$

Εφόσον η διαίρεση του $P(x)$ με $x+1$ δίνει υπόλοιπο 12 άρα

$P(-1)=12\Leftrightarrow$

$(-1)^4+\alpha(-1)^3+(\beta-1)(-1)^2-3\cdot(-1)+2=12\Leftrightarrow 1-\alpha+\beta-1+3+2=12\Leftrightarrow -\alpha+\beta=7 \quad (2)$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και έχουμε : $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ -\alpha+\beta=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=4\end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης :

α) $(2x^4-3x^3+5x^2-7x+1):(x^2-2x+3)$ β) $(x^6-2x):(x^3+1)$

γ) $(x^6+2x^4+x^2+x+2):(x+1)^3$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4-3x^3-7x^2+\alpha x+\beta$ και $Q(x)=x^2-3x+5$

α) Να γίνει η διαίρεση $P(x):Q(x)$

β) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $Q(x)$ παράγοντας του $P(x)$.

4. Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :

α) $(2x^4-3x^3+5x^2+6x-2):(x+1)$

β) $(30x^{99}-40x^{59}+70x^{19}-6x^9+3):(x-1)$

5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$P(x)=(x-3)^{2\nu+1}+x^3-1$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ με το πολυώνυμο $\delta(x)=x-2$.

7. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^4 - 3\lambda x + 2$, να έχει παράγοντα το $x - 1$. Να βρεθεί έπειτα και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.

10. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^5 - 9x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 8x - 1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

11. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντες τα $x - 2$ και $x + 3$, να δείξετε ότι και το πολυώνυμο $x^2 + x - 6$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

12. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ να διαιρεί το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + \mu x + \lambda$.

13. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 4x + \beta$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)^2$.

14. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $(x-3)$ δίνει υπόλοιπο 8 και διαιρούμενο με $(x+2)$ δίνει υπόλοιπο -7. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-3)(x+2)$.

15. Οι διαιρέσεις ενός πολυωνύμου $P(x)$ με τα διώνυμα $(x+1)$ και $(x-2)$ δίνουν υπόλοιπα 2 και -4 αντίστοιχα. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : \left(x^2 - x - 2\right)$.

17. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ με $P(0) = 2$, $P(1) = 1$ και $P(-2) = 10$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : \left(x^3 + x^2 - 2x\right)$.

23. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το $(x+1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x - 1$.

26. Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(1) = 2$ και $P(2x+1) = 2P(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-7)$.

27. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2(x-3)^{11} - (x-2)^{23} - x + 4$ έχει παράγοντες όλους του παράγοντες του $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

28. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha(x+3)^{17} + \beta(x+4)^{25} + x - 1$ να έχει παράγοντες όλους του παράγοντες του $Q(x) = x^2 + 7x + 12$.

29. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $2x^2 + 3$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Ορισμοί :

- **Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν** ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής :

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,\ \alpha_\nu \neq 0$$

- **Ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης** ονομάζεται κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, δηλαδή κάθε αριθμός ρ για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

Επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης

Η επίλυση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x) = 0$, γίνεται με παραγοντοποίηση και αναγόμαστε στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού από την αρχική.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot \ldots \cdot P_k(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1(x) = 0 \\ P_2(x) = 0 \\ \vdots \\ P_k(x) = 0 \end{cases}$$

Λυμένα παραδείγματα

22 **Να λυθεί η εξίσωση :** $x^3 - 7x + 6 = 0$.

ΛΥΣΗ:

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x\left(x^2 - 1\right) - 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)\left(x^2 + x - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 2 \ \text{ή}\ x = -3 \end{cases}$$

Θεώρημα ακεραίων ριζών: Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές $\alpha_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \ldots, \nu$. Αν ο ακέραιος ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Παρατήρηση 1 : Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Όποιος ακέραιος διαιρεί τον α_0 δεν είναι υποχρεωτικά και ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης.

Παρατήρηση 2 : Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x)=0$, με ακέραιους συντελεστές βρίσκουμε όλους τους διαιρέτες του σταθερού όρου α_0 και ελέγχουμε αν για κάποιους από αυτούς ισχύει $P(\rho)=0$.

23 **Να λυθεί η εξίσωση :** $x^3-7x+6=0$**.**

ΛΥΣΗ:

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$
Παρατηρούμε ότι το P(1)=0.

$P(x)$ $\qquad$ $x-1$

1	0	-7	6	ρ=1
↓	1	1	6	
1	1	-6	0	

$\pi(x)$ $\qquad$ $\upsilon=P(1)=0$

Επομένως η εξίσωση γίνεται :

$$x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-6\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \ \acute{\eta} \ x^2+x-6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=1 \ \acute{\eta} \ x=2 \ \acute{\eta} \ x=-3$$

24 **Να δειχθεί ότι η εξίσωση** $x^{50}-3\alpha x+3=0$, $\alpha\in\mathbb{Z}$ **δεν έχει ακέραιες ρίζες**.

ΛΥΣΗ:

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι $\pm1, \pm3$

- Αν το 1 ήταν ρίζα της τότε θα έπρεπε να την επαληθεύει άρα:

$$1^{50}-3\alpha\cdot1+3=0 \Leftrightarrow 3\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=\frac{4}{3}\notin\mathbb{Z} \text{ που είναι άτοπο αφού } \alpha\in\mathbb{Z}$$

- Αν το -1 ήταν ρίζα της τότε θα έπρεπε να την επαληθεύει άρα:

$$(-1)^{50}-3\alpha\cdot(-1)+3=0 \Leftrightarrow 3\alpha=-4 \Leftrightarrow \alpha=\frac{-4}{3}\notin\mathbb{Z} \text{ που είναι άτοπο.}$$

- Αν το 3 ήταν ρίζα της τότε θα έπρεπε να την επαληθεύει άρα:

$$3^{50}-3\alpha\cdot 3+3=0 \Leftrightarrow 9\alpha=3^{50}+3 \Leftrightarrow \alpha=\frac{3^{50}+3}{9}=\frac{3\left(3^{49}+1\right)}{9}=\frac{3^{49}+1}{3}\notin\mathbb{Z}$$

που είναι άτοπο αφού $\alpha\in\mathbb{Z}$

- Αν το -3 ήταν ρίζα της τότε θα έπρεπε να την επαληθεύει άρα:

$$(-3)^{50}-3\alpha\cdot(-3)+3=0 \Leftrightarrow 9\alpha=-3^{50}-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-\frac{3^{50}+3}{9}=\frac{-3\left(3^{49}+1\right)}{9}=-\frac{3^{49}+1}{3}\notin\mathbb{Z}$$ που είναι άτοπο αφού $\alpha\in\mathbb{Z}$.

Επίλυση πολυωνυμικών ανισώσεων

Όταν θέλουμε να επιλύσουμε μια πολυωνυμική ανίσωση $P(x)>0$ ή $P(x)<0$, τότε :

- Λύνουμε με παραγοντοποίηση την πολυωνυμική εξίσωση $P(x)=0$.
- Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου.

Παρατήρηση 1 :

Όταν δίνεται μια πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και ζητούνται :

- Το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον $y'y$ άξονα έχω :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=f(0)=\alpha_0 \end{cases}$$ δηλαδή το σημείο $\left(0,\alpha_0\right)$.

- Τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τον $x'x$ άξονα έχω :

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=0 \quad (1)$$ και οι ρίζες της εξίσωσης (1) αν υπάρχουν είναι οι τετμημένες των σημείων που θέλουμε.

- Που η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι πάνω (αντίστοιχα κάτω) από τον $x'x$ άξονα λύνω την ανίσωση $f(x)>0$ (αντίστοιχα $f(x)<0$).

Παρατήρηση 2 :

Όταν δίνονται δυο πολυωνυμικές συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και ζητούνται :

- Τα κοινά τους σημεία λύνω την εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$.
- Που η γραφική παράσταση της f είναι πάνω (αντίστοιχα κάτω) από τη γραφική παράσταση της g λύνω την ανίσωση $f(x)-g(x)>0$ (αντίστοιχα $f(x)-g(x)<0$).

Λυμένα παραδείγματα

25	**Να λυθεί η ανίσωση :** $x^4-5x^3+5x^2+5x-6\geq 0$.

ΛΥΣΗ:

- Λύνουμε πρώτα την εξίσωση : $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές. Άρα πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -6, δηλαδή οι ακέραιοι αριθμοί : $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$

Παρατηρούμε ότι P(1)=0 . Άρα εκτελούμε σχήμα Horner με το ρ=1.

$P(x)$ $\quad x-1$

1	-5	5	5	-6	ρ=1
↓	1	-4	1	6	
1	-4	1	6	0	

$\pi(x)$ $\quad \upsilon=P(1)=0$

Η εξίσωση γίνεται :

$$x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3-4x^2+x+6\right)=0.$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το $\pi(x)=\left(x^3-4x^2+x+6\right)$ και

παρατηρούμε ότι : $\pi(-1)=0$.

$\pi(x)$ $\quad x+1$

1	-4	1	6	ρ=-1
↓	-1	5	-6	
1	-5	6	0	

$\upsilon=\pi(-1)=0$

Άρα το $\pi(x)$ γράφεται : $\pi(x)=\left(x^3-4x^2+x+6\right)=(x+1)\left(x^2-5x+6\right)$ και η αρχική

εξίσωση γίνεται :

$$x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3-4x^2+x+6\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\left(x^2-5x+6\right)=0$$

Το πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα $\Delta=25-24=1>0$, ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{5\pm1}{2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}$ και παραγοντοποιούμενο γράφεται : $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

Επομένως η αρχική εξίσωση γράφεται :

$$x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3-4x^2+x+6\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\left(x^2-5x+6\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3$$

- Για την λύση της ανίσωσης κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου :

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+		+		+	
$x+1$		-	0	+		+		+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+		+	
$x-3$		-		-		-		-	0	+	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Εφόσον θέλουμε $P(x)\geq 0$ η λύση της ανίσωσης είναι το σύνολο :

$$(-\infty,\ -1]\cup[1,2]\cup[3,\ +\infty)$$

ΣΧΟΛΙΟ – ΜΕΘΟΔΟΣ :

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου P(x) τότε λέμε ότι το ρ είναι ρίζα πολλαπλότητας $\mu\in\mathbb{N}^*$ όταν $P(x)=(x-\rho)^{\mu}\cdot\pi(x)$ και το πολυώνυμο π(x) δεν έχει ρίζα το ρ. Έτσι έχουμε τις απλές , διπλές , τριπλές κ.τ.λ. ρίζες ενός πολυωνύμου. Για να βρούμε το πρόσημο ενός πολυωνύμου P(x) βρίσκουμε αρχικά όλες τις ρίζες του και έπειτα κατασκευάζουμε έναν άξονα πάνω στον οποίο και τις τοποθετούμε. Στο πρώτο δεξιά διάστημα θέτουμε το πρόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του P(x). Αν η ρίζα που χωρίζει το διάστημα αυτό από το προηγούμενό του είναι περιττής πολλαπλότητας τότε το πρόσημο αλλάζει ενώ αν η ρίζα είναι άρτιας πολλαπλότητας τότε το πρόσημο δεν αλλάζει. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε το πρόσημο του πολυωνύμου σε όλα τα διαστήματα στα οποία χωρίστηκε ο άξονας.

26	**Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το πρόσημο του πολυωνύμου** $P(x) = (2x-1)(x^2+3)(x-1)^2(x+2)^3$**.**

ΛΥΣΗ:

Επειδή το πολυώνυμο είναι σε παραγοντοποιημένη μορφή για να βρούμε τις ρίζες του μηδενίζουμε χωριστά κάθε όρο του γινομένου και έχουμε:

- $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (απλή ρίζα)
- $x^2+3=0$ (αδύνατη)
- $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ (διπλή ρίζα)
- $(x+2)^3=0 \Leftrightarrow x=-2$ (τριπλή ρίζα)

Θα ξεκινήσουμε με το πρόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου που είναι ίσο με το πρόσημο του γινομένου των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων κάθε παράγοντα του γινομένου το οποίο και είναι (+)
Στο επόμενο προς τα αριστερά διάστημα το πρόσημο δεν θα αλλάξει διότι η ρίζα (1) είναι άρτιας πολλαπλότητας , έπειτα θα αλλάξει διότι η ρίζα (1/2) είναι περιττής πολλαπλότητας και τέλος πάλι θα αλλάξει διότι η ρίζα (-2) είναι περιττής πολλαπλότητας. Έτσι έχουμε:

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
P(x)	+	-	+	+	

ΒΑΣΙΚΗ ΓΝΩΣΗ
Για την επίλυση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν ν άρτιος και α θετικός τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες οι οποίες είναι:
  $x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$
- Αν ν άρτιος και α αρνητικός τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο R.
- Αν ν περιττός και α θετικός τότε η εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα η οποία είναι:
  $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$
- Αν ν περιττός και α αρνητικός τότε η εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα η οποία είναι:
  $x = -\sqrt[\nu]{|\alpha|} = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $(2x+1)^4=81 \Leftrightarrow 2x+1=\pm\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow 2x+1=\pm 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \\ 2x+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

2. $(3x-2)^3=64 \Leftrightarrow 3x-2=\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow 3x-2=4 \Leftrightarrow x=2$

3. $(2x+5)^7=-1 \Leftrightarrow 2x+5=-\sqrt[7]{1} \Leftrightarrow 2x+5=-1 \Leftrightarrow x=-3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^3-4x^2+x+6=0$ β) $4x^3-3x-1=0$

2. Να βρεθεί ο ακέραιος k ώστε η εξίσωση

$(3k^3+1)x^4-(6k+4)x^3+(7k^2+8)x-9k=0$ να έχει ρίζα τον αριθμό 1. Για την τιμή του k που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση.

3. Να βρείτε τα σημεία τομής του $x'x$ άξονα και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+(x+1)^2$. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση δεν έχει κανένα σημείο κάτω από τον άξονα $x'x$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $6x^3-7x^2-7x+6=0$ β) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

γ) $x^3+\frac{13}{12}x^2-\frac{13}{12}x-1=0$ δ) $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{100}+2\alpha x+2=0$, με $\alpha\in\mathbb{Z}$, δεν έχει ακέραιες ρίζες.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6\le 0$ β) $2x^3-9x^2+7x+6\ge 0$

γ) $4x^4-8x^3+3x^2+2x+1<0$ δ) $x^3-x^2-x-2\ge 0$

8. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^4+x^3-7x^2+\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

1. Να προσδιοριστούν τα α, β ώστε το x^2+2x-3 να είναι παράγοντας του $P(x)$.

2. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να λυθεί η ανισότητα $P(x) < 0$.

11. Δίνονται τα πολυώνυμα :

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + x - \alpha^2 - \beta^2 \text{ και } Q(x) = (1-\alpha)x^3 - (\beta+6)x^2 + 11x - 6$$

1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η γραφική παράσταση του $P(x)$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Αν $\alpha = \beta = 0$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση του $Q(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

12. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + x + 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν τα δυο πολυώνυμα έχουν κοινό παράγοντα το $x^2 + 1$, τότε :

α. Να βρεθούν τα α, β.

β. Να λυθούν οι εξισώσεις $P(x) = 0$ και $Q(x) = 0$.

14. Να βρεθούν οι τιμές των α,β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = (\alpha x + \beta)(x^2 - 2)$.
Έπειτα να λυθεί η ανίσωση: $P(x) \le 0$

15. Να βρεθούν οι τιμές των α,β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$ να έχει το μέγιστο δυνατό πλήθος ακεραίων ριζών.
Έπειτα να λυθεί η ανίσωση: $P(x) > 0$.

16. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , g όπου $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 + 7x - 5$.

17. Να λυθεί η εξίσωση $x^6 + 5x^2 - 6 = 0$.

18. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$.
Αν είναι γνωστό ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον θετικό ημιάξονα Οx΄ σε δύο σημεία με ακέραιες τετμημένες να βρεθούν οι τιμές των α,β.
Σε ποιο διάστημα του x η C_f βρίσκεται κάτω από τον x΄x ;

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

- **Ρητές (κλασματικές) εξισώσεις**

Η διαδικασία για την επίλυσή τους είναι :

1. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. $\neq 0$ των παρονομαστών και έχουμε τους αρχικούς περιορισμούς.
2. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.
3. Εκτελούμε τις πράξεις μεταφέροντας όλους τους όρους της εξίσωσης στο 1$^{\text{ο}}$ μέλος.
4. Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει και ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε έρχονται σε αντίθεση με τους περιορισμούς μας.

Λυμένα παραδείγματα

27 **Να λύσετε την εξίσωση :** $\dfrac{4x^2-x^3-9}{x^2-2}=\dfrac{x^3+4x^2+9}{x^2+2}$.

ΛΥΣΗ: Πρέπει : $\text{Ε.Κ.Π.}\neq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2\neq 0 \\ x^2+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm\sqrt{2} \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Άρα η εξίσωση γίνεται :

$$\frac{4x^2-x^3-9}{x^2-2}=\frac{x^3+4x^2+9}{x^2+2} \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\frac{4x^2-x^3-9}{x^2-2}=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\frac{x^3+4x^2+9}{x^2+2} \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+2\right)\left(4x^2-x^3-9\right)=\left(x^2-2\right)\left(x^3+4x^2+9\right) \Leftrightarrow$$
$$4x^4-x^5-9x^2+8x^2-2x^3-18=x^5+4x^4+9x^2-2x^3-8x^2-18 \Leftrightarrow$$
$$2x^5+2x^2=0 \Leftrightarrow 2x^2\left(x^3+1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{cases}$$

- **Ρητές ανισώσεις**

Σε κλασματικές ανισώσεις δεν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών εκτός κι αν γνωρίζουμε ότι το Ε.Κ.Π των παρονομαστών είναι καθαρά θετικός ή καθαρά αρνητικός αριθμός.
Αν δε γνωρίζουμε το πρόσημο του Ε.Κ.Π τρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα , τα μεταφέρουμε στο ένα μέλος και η ανίσωση έτσι παίρνει τη μορφή
$\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ ή $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<0$ η οποία είναι ισοδύναμη με την
$P(x)Q(x)>0$ ή $P(x)Q(x)<0$ η οποία και λύνεται κατά τα γνωστά.

28 **Να λύσετε την ανίσωση :** $\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{x^2-3x+2}{x}\geq\dfrac{2}{x^2-x}$ **(1) .**

ΛΥΣΗ:

Το Ε.Κ.Π των παρονομαστών είναι $x(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq 1$

Η ανίσωση (1) γράφεται:

$$\frac{x\left(3x^2-1\right)}{x\left(x-1\right)}-\frac{\left(x-1\right)\left(x^2-3x+2\right)}{x\left(x-1\right)}\geq\frac{2}{x\left(x-1\right)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x\left(3x^2-1\right)-\left(x-1\right)\left(x^2-3x+2\right)-2}{x\left(x-1\right)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{3x^3-x-x^3+3x^2-2x+x^2-3x+2-2}{x\left(x-1\right)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^3+4x^2-6x}{x\left(x-1\right)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2x\left(x^2+2x-3\right)}{x\left(x-1\right)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2\left(x^2+2x-3\right)}{\left(x-1\right)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+2x-3\right)\left(x-1\right)\geq 0\Leftrightarrow 2(x-1)(x+3)(x-1)\geq 0\Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+3)\geq 0$$

x	$-\infty$ -3	0	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	+
(x + 3)	-	+	+	+
Γινόμενο	-	+	+	+

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $x\geq -3$ με $x\neq 0$ και $x\neq 1$

Δηλαδή $x\in[-3,+\infty)-\{0,1\}$

- **Άρρητες εξισώσεις (εξισώσεις με ριζικά)**

Η διαδικασία για την επίλυσή τους είναι :

1. Βρίσκουμε τους αρχικούς περιορισμούς απαιτώντας οι υπόρριζες ποσότητες να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

2. Σε τετραγωνικές ρίζες κάνουμε ανάλογα με την περίπτωση κάτι από τα παρακάτω:

* Αν το ριζικό είναι ένα το απομονώνουμε και υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο.

* Αν τα ριζικά είναι δυο τα κρατάμε και τα δυο στο ίδιο μέλος και θα χρειαστεί να υψώσουμε στο τετράγωνο δυο φορές.

* Αν τα ριζικά είναι τρία κρατάμε στο ένα μέλος τα δυο και υψώνουμε διαδοχικά.

* Σε κάθε περίπτωση όταν υψώνουμε στο τετράγωνο βγάζουμε κατάλληλους περιορισμούς.

Λυμένα παραδείγματα

29	**Να λύσετε την εξίσωση :** $\sqrt{x-8}=x-10$ **.**

ΛΥΣΗ:

Πρέπει να ισχύει : $\begin{cases} x-8\ge 0 \\ x-10\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 8 \\ x\ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 10$

Επομένως η εξίσωση γίνεται :

$$\sqrt{x-8}=x-10 \Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{x-8}\right)^2=(x-10)^2 \Leftrightarrow$$
$$x-8=x^2-20x+100 \Leftrightarrow$$
$$x^2-21x+108=0\ ,\ \Delta=9$$
$$x_{1,2}=\frac{21\pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 & \text{δεκτή} \\ x=9 & \text{απορρ.} \end{cases}$$

30 | **Να λύσετε την εξίσωση :** $\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=3$ **(1) .**

ΛΥΣΗ:

Πρέπει $\begin{cases} x\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 5$

Η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται: $\sqrt{5-x}=3-\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5-x}\right)^2=\left(3-\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-x=9-6\sqrt{x}+x \Leftrightarrow 6\sqrt{x}=2x+4 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}=x+2 \Leftrightarrow$

$\overset{x+2\ge 0}{\Leftrightarrow} \left(3\sqrt{x}\right)^2=(x+2)^2 \Leftrightarrow 9x=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & \text{δεκτή} \\ x=4 & \text{δεκτή} \end{cases}$

- **Άρρητες ανισώσεις**

Παρατήρηση : Σε ανισώσεις της μορφής $\sqrt{P(x)}\le Q(x)$ οι περιορισμοί είναι :

$\begin{cases} P(x)\ge 0 \\ Q(x)\ge 0 \end{cases}$

Όμοια εργάζομαι και για ανισώσεις της μορφής $\sqrt{P(x)}\le\sqrt{Q(x)}$

ή της μορφής $\sqrt{P(x)}\ge\sqrt{Q(x)}$.

31 | **Να λύσετε την ανίσωση :** $\sqrt{2x+1}\le 7-x$ **(1) .**

ΛΥΣΗ:

Πρέπει $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2} \\ 7-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 7 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le 7$

Η ανίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται

$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\le(7-x)^2 \Leftrightarrow 2x+1\le 49-14x+x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-16x+48\ge 0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $x=4$ και $x=12$

Το πρόσημο του τριωνύμου είναι :

x	$-\infty$ 4	12	$+\infty$
$x^2-16x+48$	+	-	+

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x\le 4$ ή $x\ge 12$

Συναληθεύοντας τις λύσεις με τους περιορισμούς έχουμε: $-\dfrac{1}{2}\le x\le 4$

Παρατήρηση: Σε ανισώσεις της μορφής $\sqrt{P(x)}\ge Q(x)$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1η περίπτωση: Αν Q(x)<0 τότε οι λύσεις είναι όλα τα x για τα οποία $\begin{cases}P(x)\ge 0\\Q(x)<0\end{cases}$

2η περίπτωση: Αν $Q(x)\ge 0$ τότε υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο λύνουμε την ανίσωση που προκύπτει και συναλυθεύουμε με τους περιορισμούς.
Οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης είναι η ένωση των λύσεων των δύο περιπτώσεων.

32	**Να λύσετε την ανίσωση :** $\sqrt{x-2}\ge x-4$ **(1) .**

ΛΥΣΗ:

Σε κάθε περίπτωση πρέπει $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$
1η περίπτωση: Αν είναι $x-4<0\Leftrightarrow x<4$ τότε η ανίσωση αληθεύει διότι το πρώτο μέλος είναι αριθμός θετικός ενώ το δεύτερο μέλος αρνητικός.
Άρα οι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος [2,4) είναι λύσεις της ανίσωσης.
2η περίπτωση: Αν είναι $x-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4$ τότε υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχουμε

$$\left(\sqrt{x-2}\right)^2\ge (x-4)^2\Leftrightarrow x-2\ge x^2-8x+16\Leftrightarrow x^2-9x+18\le 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου είναι :

x	$-\infty$ 3	6	$+\infty$
$x^2-9x+18$	+	-	+

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι $3\le x\le 6$
Επειδή όμως είναι $x\ge 4$ έχουμε τελικά ότι $4\le x\le 6$
Οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης είναι η ένωση των λύσεων των δύο περιπτώσεων
Άρα η ανίσωση τελικά αληθεύει για κάθε $x\in[2,6]$.

Εξισώσεις που λύνονται με αντικατάσταση

33 **Να λύσετε την εξίσωση :** $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

ΛΥΣΗ:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$$
$$\left[(x+1)(x+4)\right]\left[(x+2)(x+3)\right]=120$$
$$\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=120 \qquad (1)$$

Θέτουμε $x^2+5x+4=y$ (2) οπότε $x^2+5x+6=y+2$ (3)

Άρα η εξίσωση (1) γίνεται :

$$y(y+2)=120$$
$$y^2+2y-120=0$$

βρίσκουμε τη διακρίνουσα $\Delta=4+480=484$

και υπολογίζουμε τις ρίζες $y_{1,2}=\dfrac{-2\pm 22}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10\\ y=-12\end{cases}$

άρα από τη (2) έχουμε :

α) $x^2+5x+4=10$

$x^2+5x-6=0$

$\Delta=25+24=49$

$x_{1,2}=\dfrac{-5\pm 7}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\ x=1\end{cases}$

β) $x^2+5x+4=-12$

$x^2+5x+16=0$

$\Delta=25-64=-39<0$

αδύνατη στο $\mathbb{R}$

34 **Να λύσετε την εξίσωση :** $x^2+x=\sqrt{3x^2+3x-2}$.

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $x^2+x=y$ (1)

Άρα η εξίσωση γίνεται :

$$x^2+x=\sqrt{3x^2+3x-2}$$
$$y=\sqrt{3y-2}\quad ,\ \text{με}\ 3y-2\ge 0\Leftrightarrow y\ge\frac{2}{3}$$

υψώνουμε κατά μέλη στο τετράγωνο και έχουμε :

$$y^2=3y-2$$
$$y^2-3y+2=0$$

Βρίσκουμε τη διακρίνουσα Δ=1 και έχουμε :

$y_{1,2}=\dfrac{3\pm 1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ y=2\end{cases}$ που είναι και οι δυο δεκτές.

Άρα από την (1) έχουμε :

Α) $y=1$

$x^2+x=1$

$x^2+x-1=0$

Β) $y=2$

$x^2+x=2$

$x^2+x-2=0$

Βρίσκουμε τις διακρίνουσες

Δ=5 Δ=9

Προκύπτουν οι λύσεις

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \qquad x_{3,4}=\frac{-1\pm 3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ x=1\end{cases}$$

35 **Να λύσετε την εξίσωση :** $x^6-4x^4-x^2+4=0$**.**

ΛΥΣΗ:

Παρατηρούμε ότι οι εκθέτες του x στο πολυώνυμο είναι όλοι άρτιοι.

Θέτουμε $x^2=y>0$ (1).

Άρα προκύπτει η εξίσωση

$y^3-4y^2-y+4=0$

η οποία λύνεται είτε με τη βοήθεια του Θ. Ακεραίων ριζών είτε με παραγοντοποίηση.

$y^2(y-4)-(y-4)=0$

$(y-4)(y^2-1)=0$

$y-4=0$ ή $y^2-1=0$

$y=4$ ή $y=1$ ή $y=-1$ (απορρίπτεται)

Από την (1) έχουμε :

$x^2=4$ ή $x^2=1$

και τελικά

$x=2$ ή $x=-2$ ή $x=1$ ή $x=-1$

36 **Να λύσετε την εξίσωση :** $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-12=0$**.**

ΛΥΣΗ:

Πρέπει $x\geq 0$

Θέτουμε $\sqrt[3]{x}=y\geq 0$ οπότε η (1) γράφεται: $y^2-y-12=0\Rightarrow\begin{cases}y=-3 & \text{απορ.}\\ y=4 & \text{δεκτή}\end{cases}$

Για y = 4 έχουμε $\sqrt[3]{x}=4\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=4^3\Leftrightarrow x=64$ δεκτή

37 **Να λύσετε την εξίσωση :** $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$**.**

ΛΥΣΗ:

Πρέπει $x\geq 0$

Θέτουμε $\sqrt[6]{x}=y\geq 0$ οπότε $\left(\sqrt[6]{x}\right)^2=y^2\Leftrightarrow y^2=\sqrt[3]{x}$ άρα η (1) γράφεται:

$$y^2+y-2=0\Rightarrow\begin{cases}y=-2 & \text{απορ.}\\ y=1 & \text{δεκτη}\end{cases}$$

Για y = 1 έχουμε $\sqrt[6]{x}=1\Leftrightarrow\left(\sqrt[6]{x}\right)^6=1^6\Leftrightarrow x=1$ δεκτή

38 **Να λύσετε την εξίσωση :** $\frac{3}{\eta\mu^2 x}-5\eta\mu x=\frac{4}{\eta\mu x}+2\sigma\upsilon\nu^2 x$.

ΛΥΣΗ:

Πρέπει $\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Η εξίσωση (1) πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με $\eta\mu^2 x$ ισοδύναμα γράφεται:

$3-5\eta\mu^3 x=4\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-5\eta\mu^3 x=4\eta\mu x+2\left(1-\eta\mu^2 x\right)\cdot\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-5\eta\mu^3 x=4\eta\mu x+2\eta\mu^2 x-2\eta\mu^4 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\eta\mu^4 x-5\eta\mu^3 x-2\eta\mu^2 x-4\eta\mu x+3=0$ (2)

Θέτουμε $\eta\mu x=y$, $-1\leq y\leq 1$

Άρα η (2) γράφεται $2y^4-5y^3-2y^2-4y+3=0$ (3)

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 3$

Παρατηρούμε ότι το 3 είναι ρίζα της οπότε με σχήμα Horner έχουμε :

2	-5	-2	-4	3	3
	6	3	3	-3	
2	1	1	-1	0	

Το πηλίκο της διαίρεσης με το (y - 3) είναι: $2y^3+y^2+y-1$

Άρα η (3) γράφεται: $\left(y-3\right)\left(2y^3+y^2+y-1\right)=0$ (4)

Άρα ή $y-3=0 \Leftrightarrow y=3$ απορ. ή $2y^3+y^2+y-1=0 \Leftrightarrow 2y^3+y^2-y+2y-1=0 \Leftrightarrow$

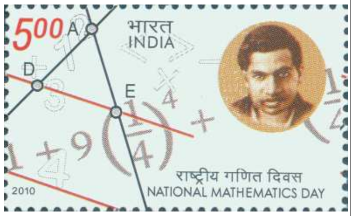
$\Leftrightarrow y\left(2y^2+y-1\right)+2y-1=0$ (5)

όμως $2y^2+y-1=2\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+1\right)=\left(2y-1\right)\left(y+1\right)$ (παραγοντοποίηση τριωνύμου)

Άρα η (3) γράφεται: $y\left(2y-1\right)\left(y+1\right)+\left(2y-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(2y-1\right)\left(y^2+y+1\right)=0$

Άρα ή $2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$ (δεκτή) ή $y^2+y+1=0$, $\Delta=-3<0$ (αδύνατη)

Για $y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$



39 **Να λύσετε την εξίσωση :** $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=x-3$.

ΛΥΣΗ:

Πρέπει $x\geq 0$ και $\sqrt{x}+1\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x\geq 0$.

Θέτουμε $\sqrt{x}=y\geq 0$ άρα $\left(\sqrt{x}\right)^2=y^2 \Leftrightarrow x=y^2$

Επομένως η (1) γράφεται:

$\frac{y^2-1}{y+1} = y^2 - 3 \Leftrightarrow y^3 + y^2 - 3y - 3 = y^2 - 1 \Leftrightarrow y^3 - 3y - 2 = 0$ (2)

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2$

Παρατηρούμε ότι το -1 είναι ρίζα της οπότε με σχήμα Horner έχουμε :

1	0	-3	-2	-1
	-1	1	2	
1	-1	-2	0	

Το πηλίκο της διαίρεσης με το (y + 1) είναι: $y^2 - y - 2$

Άρα η (3) γράφεται: $(y+1)\left(y^2 - y - 2\right) = 0$ (4)

Άρα ή $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$ $(\alpha\pi o\rho.)$ ή $y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 & \alpha\pi o\rho. \\ y=2 & \delta\varepsilon\kappa\tau\eta \end{cases}$

Για y = 2 έχουμε: $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ $(\delta\varepsilon\kappa\tau\eta)$

Αντίστροφες πολυωνυμικές εξισώσεις

- **<u>Αντίστροφες εξισώσεις 3</u>**

<u>Μορφή:</u> $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$

Ισοδύναμα έχουμε : $\alpha(x^3+1) + \beta x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha(x+1)(x^2-x+1) + \beta x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)[\alpha(x^2-x+1)+\beta x] = 0 \Leftrightarrow$

ή $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

ή $\alpha(x^2-x+1)+\beta x = 0$ η οποία λύνεται ως εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

- **<u>Αντίστροφες εξισώσεις $4^{ου}$ βαθμού</u>**

<u>Μορφή</u>: $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$

Διαιρώ όλους τους όρους με x^2 $(x \neq 0)$ και έχουμε:

$\frac{\alpha x^4}{x^2} + \frac{\beta x^3}{x^2} + \frac{\gamma x^2}{x^2} + \frac{\beta x}{x^2} + \frac{\alpha}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\beta}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha(x^2 + \frac{1}{x^2}) + \beta(x + \frac{1}{x}) + \gamma = 0$ (1)

θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y$ (2) άρα

$$(x+\frac{1}{x})^2=y^2 \Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=y^2 \Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \quad (3)$$

οπότε η (1) με τη βοήθεια των (2) , (3) γράφεται:

$$\alpha\cdot(y^2-2)+\beta\cdot y+\gamma=0 \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) μπορεί εύκολα να λυθεί αφού είναι $2^{ου}$ ως προς y.
Οι λύσεις που βρίσκουμε για το y αν τοποθετηθούν στη σχέση (2) μας δίνουν τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

<u>Μορφή</u>: $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2-\beta x+\alpha=0$, $\alpha\neq 0$

Διαιρώ όλους τους όρους με x^2 $(x\neq 0)$ και εργαζόμενοι ομοίως έχουμε:

$$\alpha(x^2+\frac{1}{x^2})+\beta(x-\frac{1}{x})+\gamma=0 \quad (1)$$

θέτουμε $x-\frac{1}{x}=y$ (2) άρα

$$(x-\frac{1}{x})^2=y^2 \Leftrightarrow x^2-2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=y^2 \Leftrightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}=y^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2 \quad (3)$$

οπότε η (1) με τη βοήθεια των (2) , (3) γράφεται:

$$\alpha\cdot(y^2+2)+\beta\cdot y+\gamma=0 \quad (4)$$

Λύνουμε την (4) και έπειτα με τη βοήθεια της (2) βρίσκουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

- **<u>Αντίστροφες εξισώσεις $5^{ου}$ βαθμού</u>**

<u>Μορφή</u>: $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$, $\alpha\neq 0$

Ισοδύναμα έχουμε : $\alpha(x^5+1)+\beta x(x^3+1)+\gamma x^2(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\alpha(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+\beta x(x+1)(x^2-x+1)+\gamma x^2(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)[\alpha(x^4-x^3+x^2-x+1)+\beta x(x^2-x+1)+\gamma x^2]=0$$

ή $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

ή $\alpha(x^4-x^3+x^2-x+1)+\beta x(x^2-x+1)+\gamma x^2=0 \Leftrightarrow$

$$\alpha x^4-\alpha x^3+\alpha x^2-\alpha x+\alpha+\beta x^3-\beta x^2+\beta x+\gamma x^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0 \Leftrightarrow$$

οποία λύνεται ως αντίστροφη εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού.

- **<u>Αντίστροφες εξισώσεις $6^{ου}$ βαθμού</u>**

<u>Μορφή</u>: $\alpha x^6+\beta x^5+\gamma x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$, $\alpha\neq 0$

Διαιρώ όλους τους όρους με x^3 $(x\neq 0)$ και έχουμε:

$$\frac{\alpha x^6}{x^3}+\frac{\beta x^5}{x^3}+\frac{\gamma x^4}{x^3}+\frac{\delta x^3}{x^3}+\frac{\gamma x^2}{x^3}+\frac{\beta x}{x^3}+\frac{\alpha}{x^3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta+\frac{\gamma}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\alpha}{x^3}=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha(x^3+\frac{1}{x^3})+\beta(x^2+\frac{1}{x^2})+\gamma(x+\frac{1}{x})+\delta=0 \ \ (1)$$

θέτουμε $x+\dfrac{1}{x}=y$ (2) άρα

$$(x+\frac{1}{x})^2=y^2\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=y^2\Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \ \ (3)$$

$$(x+\frac{1}{x})^3=y^3\Leftrightarrow x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=y^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=y^3\Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3(x+\frac{1}{x}) \ \ \Leftrightarrow$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y \ \ (3)$$

οπότε η (1) με τη βοήθεια των (2) , (3) γράφεται:

$$\alpha\cdot(y^3-3y)+\beta\cdot(y^2-2)+\gamma\cdot y+\delta=0 \ \ (4)$$

Λύνουμε την (4) και έπειτα με τη βοήθεια της (2) βρίσκουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Ασκήσεις

1. Να λυθεί η εξίσωση : $\dfrac{x^2+1}{x-2}-3\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{10}{x(x-2)}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\sqrt{9x-2}=3x-2$ β) $\sqrt{x+3}=x+1$ γ) $5x-4\sqrt{x+11}=3x-6$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\sqrt{2x}+2\sqrt{x+2}=2$ β) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-19}=10$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\sqrt{x+1}<x-1$ β) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2+2}\geq\dfrac{x}{2}$ γ) $\sqrt{x^2-8x+15}<x+3$

δ) $\sqrt{x^2-2x+6}\geq 2x-3$ ε) $\sqrt{x-8}+\sqrt{x-5}<3$

9. Να λύσετε την εξίσωση : $2\eta\mu^8x-9\eta\mu^6x+14\eta\mu^4x-9\eta\mu^2x+2=0$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\left(x^2+3x-2\right)^6-9\left(x^2+3x-2\right)^3+8=0$ β) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2-5\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+6=0$

γ) $(x+2)^8-3(x+2)^4-4=0$ δ) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3}{x^2-1}$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις **(αντίστροφες)** :

α) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ β) $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$