ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ δίνεται ότι $\hat{A} = 30^0$.
Να δειχθεί ότι: $\alpha = \beta\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

2. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΓ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνουμε αντίστοιχα τμήματα ΓΔ = ΒΓ και ΒΖ = ΑΒ.
Να δειχθεί ότι: $\Delta Z^2 = 6\alpha^2 + 3\gamma^2 - 2\beta^2$.

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\mu_\alpha = \alpha\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Να δειχθεί ότι:

i) $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$

ii) Αν Η το ορθόκεντρο του ΑΒΓ , τότε $AH \cdot \upsilon_\alpha = \alpha^2$

4. Αν ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ τέμνουν αντίστοιχα τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ ,να δειχθεί ότι: ΒΚ = ΓΛ.

5. Στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ κύκλου (Ο,R) προς το Β θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ. ΄Εστω ΓΔ το εφαπτόμενο τμήμα προς τον κύκλο. Αν η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Γ τέμνει την ΑΔ στο Ε , να δειχθεί ότι: $A\Delta \cdot AE = A\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2$.

6. Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ να δειχθεί ότι: $AB^2 + A\Gamma^2 = 2 \cdot AM \cdot A\Delta$.

7. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο.
Αν (ΑΒΟ) = 12 , (ΒΓΟ) = 9 και (ΓΔΟ) = 15, να δειχθεί ότι: (ΔΑΟ) = 20.

8. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο.
Αν $A\hat{O}\Delta = 60^0$ ν.δ.ο :$(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{\sqrt{3} \cdot A\Gamma \cdot B\Delta}{4}$.

9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30^0$ και $\hat{\Gamma} = 45^0$ η περίμετρος του είναι $2\tau = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ να δείξετε ότι : $(AB\Gamma) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

10. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 5$, $\hat{A} = 60^0$ και $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ (ακτίνα περ/νου κύκλου) να δειχθεί ότι ΒΓ = 7 , ΑΓ = 8 και (ΑΒΓ) = $10\sqrt{3}$.

11. Από εσωτερικό σημείο Μ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε κάθετες στις ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ παίρνοντας τμήματα ΜΕ=ΑΒ , ΜΚ=ΒΓ , ΜΖ=ΑΓ αντίστοιχα.
Να δειχθεί ότι : (ΕΚΖ) = 3(ΑΒΓ).

12. Να βρεθεί το μήκος της διαγωνίου ορθογωνίου με περίμετρο 20 και εμβαδόν 21. (Απ: $\delta = \sqrt{58}$)

13. Να βρεθεί το εμβαδόν ρόμβου με περίμετρο 52 και άθροισμα διαγωνίων 34. (Απ: Ε = 120)

14. ΄Εστω δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) και (Ο,2R) και μια χορδή ΑΒ του (Ο,2R) που εφάπτεται στον (Ο,R). Να δειχθεί ότι το μήκος της χορδής ΑΒ είναι $2\sqrt{3}R$ και ότι το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι: $l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{4\pi R}{3}$.

15. ΄Εστω οι παράλληλες χορδές ΑΒ = R και ΓΔ = $R\sqrt{3}$ προς το ίδιο μέρος του κέντρου Ο του κύκλου (Ο,R). Να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τραπεζίου ΑΒΔΓ.

(Απ: Ε = $\dfrac{\pi R^2}{6}$)

16. Σε κύκλο (Ο,R) είναι εγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^0$. Αν εκτός του τριγώνου γραφεί ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου

(Απ: Ε = $\dfrac{\pi + 6\sqrt{3}}{24}R^2$)

17. Τρεις κύκλοι (O_1,R_1) , (O_2,R_2) , (O_3,R_3) εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά. Αν είναι
$R_1 = \sqrt{3} - 1$, $R_2 = \sqrt{3} + 1$ και $R_3 = 3 - \sqrt{3}$ να βρεθεί το εμβαδόν του σχηματιζόμενου καμπυλόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία επαφής των κύκλων.

(Απ: Ε = $2\sqrt{3} - \dfrac{\pi(10 - 4\sqrt{3})}{3}$)

18. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ με ΟΑ = ΟΒ = R. Αν ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας R τέμνει το τεταρτοκύκλιο στο Γ, να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ.

(Απ: $P = \dfrac{2\pi + 3}{3}R$ και Ε = $\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}R^2$)

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 1 , β = 2 και γ = $\sqrt{3}$. Αν ο εγγεγραμμένος κύκλος του εφάπτεται στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, να βρεθούν:
i) (ΑΒΓ) , ii) η ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου , iii) το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{K\Lambda}$, iv) τα μήκη των τμημάτων ΓΚ και ΓΛ , v) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΓΚΟΛ.

20. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α .΄Εστω Θ το κέντρο βάρους . Με κέντρα τις κορυφές του και ακτίνα R = ΑΘ γράφουμε τόξα που τέμνουν τις πλευρές του. Να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος που ορίζεται από τα τόξα αυτά και τις πλευρές του τριγώνου. (Σημείωση: ισχύει ΑΘ=ΒΘ=ΓΘ= $\frac{2}{3}\mu_\alpha$)

(Απ: $E = (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}) \cdot \alpha^2$)

21. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Αν με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $R = \frac{\delta}{2}$ (όπου δ η διαγώνιος του τετραγώνου) γράφουμε τόξα στο εσωτερικό του τετραγώνου που τέμνουν τις πλευρές του. Να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος που ορίζεται από τα τόξα αυτά και τις πλευρές του τετραγώνου.

(Απ: $E = \frac{\pi - 2}{2} \cdot \alpha^2$)

22. Δύο κύκλοι (O_1,R_1) , (O_2,R_2) εφάπτονται εξωτερικά και έστω E_1 και E_2 τα εμβαδά των κυκλικών τους δίσκων. Αν Ε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με διάμετρο το κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους ΑΒ να δειχθεί ότι: $E^2 = E_1 \cdot E_2$.

23. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α=13 , β=14 και γ=15 γράφουμε ημικύκλιο που να εφάπτεται στις πλευρές β και γ και το κέντρο του να βρίσκεται επί της πλευράς α. Να βρεθεί το εμβαδόν του ημικυκλικού δίσκου.

24. Με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α γράφουμε ημικύκλια στο εσωτερικό του που τέμνονται στο Μ. Αν ΕΖ είναι το κοινό εφαπτόμενο τμήμα των δύο ημικυκλίων να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου ΕΖΜ.

(Απ: $P = \frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4} \cdot \alpha$, $E = \frac{4\sqrt{2} - \pi - 2}{16} \cdot \alpha^2$)

25. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ = 3cm και σημείο Α τέτοιο ώστε ΟΑ=6cm. Αν ΑΒ και ΑΓ τα εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο , να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του σχηματιζόμενου μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

(Απ: $P = (2\sqrt{3} + \pi)$ cm , $E = 3(3\sqrt{3} - \pi)$ cm^2)

26. ΄Εστω κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Αν τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ τέμνονται στην προέκτασή τους στο σημείο Η να υπολογιστούν τα εμβαδά των τριγώνων ΗΖΕ και ΗΒΓ συναρτήσει της ακτίνας R.

(Απ: (ΗΖΕ)= $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$,(ΗΒΓ)= $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$)

27. ΄Εστω κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και Η το μέσον της πλευράς ΓΔ. Να βρεθούν τα εμβαδά των πολυγωνικών χωρίων: (ΑΒΓΗ) και (ΑΗΔΕΖ) συναρτήσει της ακτίνας R.

(Απ: (ΑΒΓΗ)= $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$,(ΑΗΔΕΖ)= $R^2 \cdot \sqrt{3}$)

28. Ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) έτσι ώστε ΑΒ= $R\cdot\sqrt{2}$ και ΑΓ= $R\cdot\sqrt{3}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του και το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R.

(Απ: (ΑΒΓ)= $\dfrac{R^2(\sqrt{3}+3)}{4}$)

29. Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο (Ο,R) κανονικών εξαγώνων. (Απ: $\dfrac{E}{E'}=\dfrac{3}{4}$)

30. Έστω τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ ακτίνας R. Αν Γ σημείο του τόξου ΑΒ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΚ να ισούται με το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΚΓ ,να βρεθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου ΑΓ. (Απ: $S_{\overset{\frown}{AB}}=R$)

31. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου ο οποίος είναι εγγεγραμμένος σε τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ ακτίνας R. (Απ: $E=\pi R^2\cdot(3-2\sqrt{2})$)

32. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και το ύψος ΒΔ.
Να δειχθεί ότι $MA^2-MB^2=A\Delta\cdot A\Gamma$.

33. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ εκατέρωθεν της ΒΓ. Να δειχθεί ότι $A\Delta^2+AE^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

34. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\mu_\beta\perp\mu_\gamma$.Να δειχθεί ότι:

i) $\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2=\dfrac{9\alpha^2}{4}$, ii) $\beta^2+\gamma^2=5\cdot\alpha^2$, iii) $\mu_\alpha^2=\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2$.