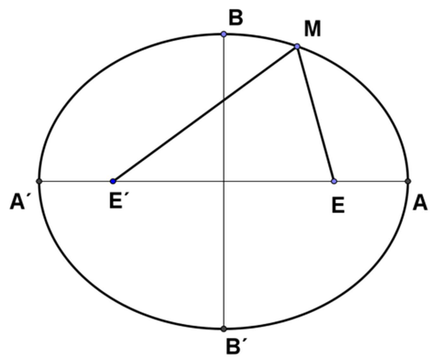
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Η ΕΛΛΕΙΨΗ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω Ε και Ε΄ δύο σημεία του επιπέδου. Έλλειψη με **εστίες** τα σημεία Ε και Ε΄ λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τους από τα σημεία Ε και Ε΄ είναι σταθερό και μεγαλύτερο από το (ΕΕ΄).



- Το σταθερό άθροισμα συμβολίζεται με **2α. (α>0)**
- Η απόσταση (ΕΕ΄) λέγεται **εστιακή απόσταση.**

  και συμβολίζεται με **2γ.** (προφανώς είναι α>γ>0)

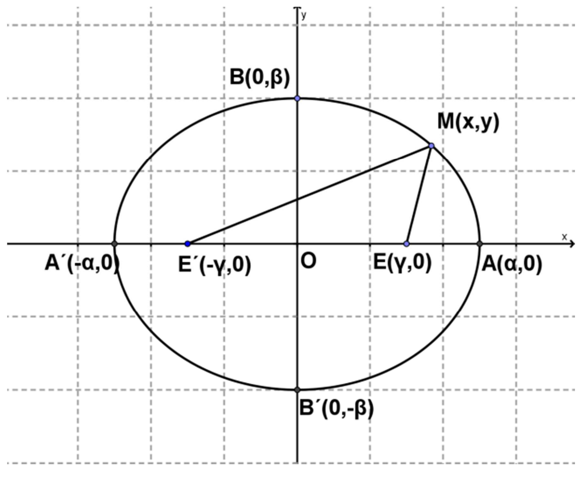
- Για κάθε σημείο Μ της έλλειψης ισχύει: $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=2\alpha$
- Τα σημεία Α΄, Α , Β΄ και Β λέγονται **κορυφές** της έλλειψης.
- Το τμήμα Α΄Α λέγεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης.
- Το τμήμα Β΄Β λέγεται **μικρός άξονας** της έλλειψης.
- Κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο σημεία της έλλειψης που διέρχεται από το κέντρο της λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης.

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ</u>

1. Με εστίες στον άξονα x΄x και κέντρο συμμετρίας το O(0,0)

Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0) και σταθερό άθροισμα 2α είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \mu\varepsilon \quad \beta^2=\alpha^2-\gamma^2$$



Οι κορυφές της έλλειψης είναι:Α΄(-α,0) , Α(α,0) , Β΄(0,-β) και Β(0,β) .

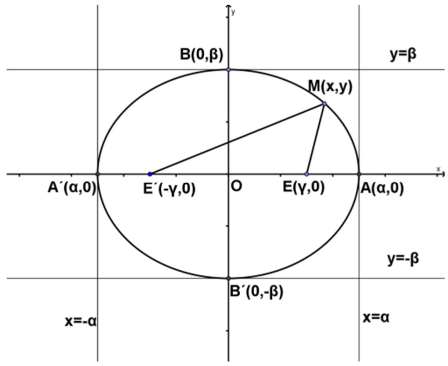
Μεγάλος άξονας: **(Α΄Α)=2α.**

Μικρός άξονας: **(Β΄Β)=2β.**

Κάθε σημείο Μ(x,y) της έλλειψης έχει συντεταγμένες

$$-\alpha \le \mathrm{x} \le \alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad -\beta \le \mathrm{y} \le \beta$$

Δηλαδή η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες x=α , x=-α , y=β και y=-β.



2. Με εστίες στον άξονα y΄y και κέντρο συμμετρίας το O(0,0)

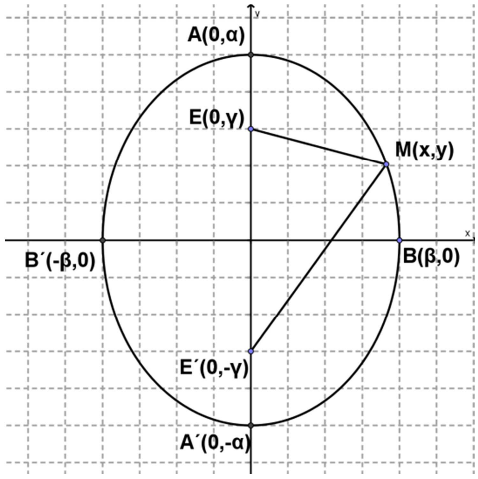
Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία Ε΄(0,-γ) και Ε(0,γ) και σταθερό άθροισμα 2α είναι:

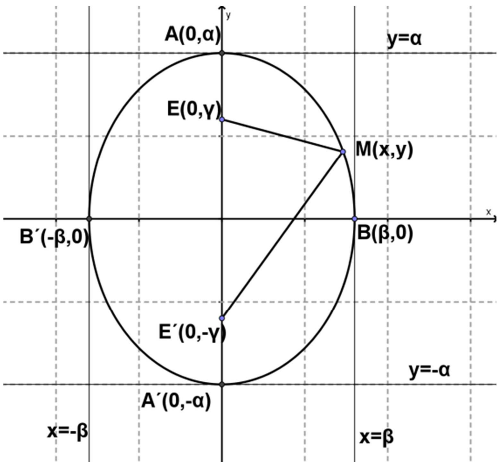
$$\frac{\mathrm{x}^2}{\beta^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{\alpha^2}=1 \quad , \quad \mu\varepsilon \quad \beta^2=\alpha^2-\gamma^2$$

Οι κορυφές της έλλειψης είναι: Α΄(0,-α) , Α(0,α) ,Β΄(-β,0) και Β(β,0) .

Μεγάλος άξονας: **(Α΄Α)=2α.**

Μικρός άξονας: **(Β΄Β)=2β.**



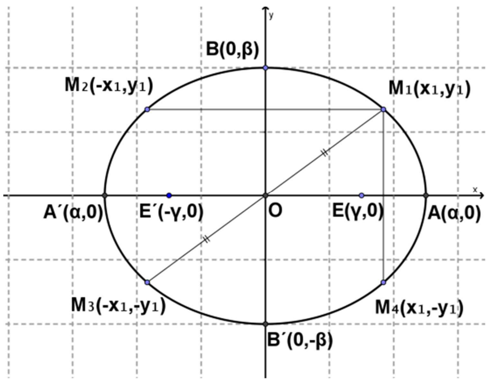


Κάθε σημείο Μ(x,y) της έλλειψης έχει συντεταγμένες

$$-\beta \le \mathrm{x} \le \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad -\alpha \le \mathrm{y} \le \alpha$$

Δηλαδή η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες x=β , x=-β , y=α και y=-α.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ



Οι άξονες x΄x και y΄y είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης.

Το Ο(0,0) είναι κέντρο συμμετρίας της έλλειψης και λέγεται κέντρο της.

Όταν ένα σημείο $M_1(x_1, y_1) \in C$ τότε λόγω των παραπάνω συμμετριών και τα σημεία $M_2(-x_1, y_1)$, $M_3(-x_1, -y_1)$, $M_4(x_1, -y_1) \in C$

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

<u>**Ορισμός**</u>: ονομάζουμε εκκεντρότητα μιας έλλειψης και τη συμβολίζουμε με **ε** το λόγο $\boxed{\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1}$ $\quad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ \alpha > \gamma)$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Η εκκεντρότητα είναι μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή μιας έλλειψης.

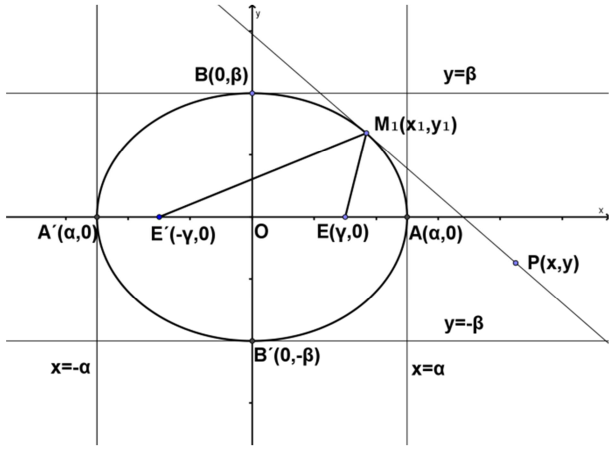
- Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ και κατά συνέπεια τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη.
- Αν η εκκεντρότητα της έλλειψης τείνει στο 1 , τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha} \to 0$.Τότε η έλλειψη τείνει να πάρει τη μορφή ευθύγραμμου τμήματος.
- Αν η εκκεντρότητα της έλλειψης τείνει στο 0 , τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha} \to 1$ δηλαδή $\beta \to \alpha$. Τότε η έλλειψη τείνει να πάρει τη μορφή κύκλου.
- Δύο ελλείψεις με ίδια εκκεντρότητα λέγονται **όμοιες**.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΛΛΕΙΨΗ

Έστω ένα σημείο Μ του επιπέδου και μια έλλειψη C με εστίες Ε και Ε΄ και σταθερό άθροισμα 2α.

- Το $M \in C \Leftrightarrow (ME) + (ME') = 2\alpha$
- Το Μ είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης αν και μόνο αν $(ME) + (ME') < 2\alpha$
- Το Μ είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης αν και μόνο αν $(ME) + (ME') > 2\alpha$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ



- Η εφαπτομένη της έλλειψης C:

  $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \mu\varepsilon \quad \beta^2=\alpha^2-\gamma^2$

  στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι :

  $$\boxed{\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1}$$

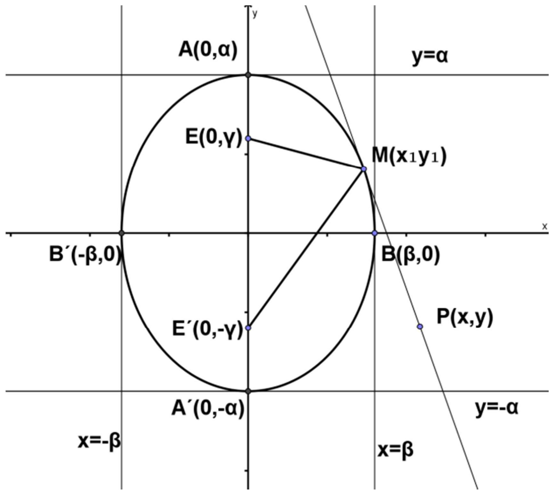
Η εξίσωση αυτή γράφεται και ως εξής :

$\beta^2 x\cdot x_1+\alpha^2 y\cdot y_1=\alpha^2\beta^2$

Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\beta^2\cdot x_1}{\alpha^2\cdot y_1} \quad , \quad y_1\neq 0$

Στις κορυφές της Α΄ και Α η έλλειψη δέχεται κατακόρυφες εφαπτόμενες.

Στις κορυφές της Β΄ και Β η έλλειψη δέχεται οριζόντιες εφαπτόμενες.



- Η εφαπτομένη της έλλειψης C:

  $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1 \quad , \quad \mu\varepsilon \quad \beta^2=\alpha^2-\gamma^2$

  στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι :

  $$\boxed{\frac{x\cdot x_1}{\beta^2}+\frac{y\cdot y_1}{\alpha^2}=1}$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται και ως εξής :

$\alpha^2 x\cdot x_1+\beta^2 y\cdot y_1=\alpha^2\beta^2$

Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda=-\frac{\alpha^2\cdot x_1}{\beta^2\cdot y_1} \quad , \quad y_1\neq 0$

Στις κορυφές της Α΄ και Α η έλλειψη δέχεται οριζόντιες εφαπτόμενες.

Στις κορυφές της Β΄ και Β η έλλειψη δέχεται κατακόρυφες εφαπτόμενες.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1^Η^</u>

Να αναγνωριστούν οι καμπύλες που παριστάνουν οι παρακάτω εξισώσεις:

1. $\boxed{9x^2 + 25y^2 = 225}$

Αρχικά διαιρώ όλους τους όρους με το 225 και έχω:

Η εξίσωση που κατέληξα έχει μορφή …………………….με εστίες στον άξονα……… και α^2 = ……… , β^2 =……….

Με δεδομένο ότι α>0 και β>0 έχουμε : α = ………..και β = ………..

Άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ = …………….. άρα γ = …….

Εστίες:

Κορυφές μεγάλου άξονα:

Κορυφές μικρού άξονα:

Εστιακή απόσταση:

Μεγάλος άξονας:

Μικρός άξονας:

Εκκεντρότητα:

2. $\boxed{4x^2 + y^2 = 8}$

Αρχικά διαιρώ όλους τους όρους με το 8 και έχω:

Η εξίσωση που κατέληξα έχει μορφή …………………….με εστίες στον άξονα……… και α^2 = ……… , β^2 =……….

Με δεδομένο ότι α>0 και β>0 έχουμε : α = ………..και β = ………..

Άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ = …………….. άρα γ = …….

Εστίες:

Κορυφές μεγάλου άξονα:

Κορυφές μικρού άξονα:

Εστιακή απόσταση:

Μεγάλος άξονας:

Μικρός άξονας:

Εκκεντρότητα:

ΑΣΚΗΣΗ 2^{Η}

Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο Μ(2,1) και έχει εστίες $\mathrm{E}'\left(-\sqrt{6},0\right) \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{E}\left(\sqrt{6},0\right)$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Για να βρούμε τη σχετική θέση μιας ευθείας και μιας έλλειψης λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους και μετά από την απαλοιφή του ενός αγνώστου βρίσκουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x ή ως προς y .

- Αν αυτή έχει Δ>0 τότε η ευθεία και η έλλειψη έχουν δύο διακεκριμένα κοινά σημεία , δηλαδή η ευθεία είναι τέμνουσα της έλλειψης.
- Αν αυτή έχει Δ=0 τότε η ευθεία και η έλλειψη έχουν ένα κοινό σημείο , δηλαδή η ευθεία είναι εφαπτόμενη της έλλειψης.
- Αν αυτή έχει Δ<0 τότε η ευθεία και η έλλειψη δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

ΑΣΚΗΣΗ 3[Η]

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $4x^2+y^2=8$

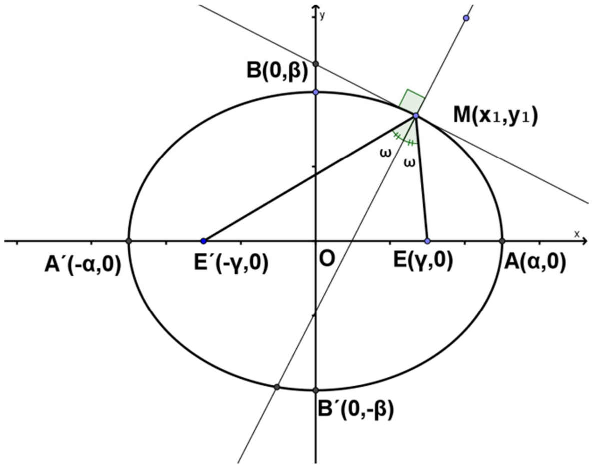
Να δειχθεί ότι η ευθεία $(\varepsilon):2x-y=4$ εφάπτεται της έλλειψης και να βρεθεί το σημείο επαφής τους.

Να βρεθεί η τιμή του k ώστε η ευθεία $(\varepsilon):y=kx+4$ να εφάπτεται της έλλειψης.

Να βρεθεί η τιμή του k ώστε η ευθεία $(\varepsilon):y=2x+k$ να εφάπτεται της έλλειψης.

ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Η κάθετη ευθεία στην εφαπτόμενη μιας έλλειψης στο σημείο της Μ, είναι διχοτόμος της γωνίας $E\acute{}\hat{M}E$



ΑΣΚΗΣΗ 4Η

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $x^2+2y^2=4$ και το σημείο της $M\left(\sqrt{2},1\right)$

Να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\acute{}\hat{M}E$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της έλλειψης στο σημείο της Μ είναι

$$\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1\Leftrightarrow$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της είναι:

Σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης ισχύει ότι:

Η κάθετη ευθεία (δ) της (ε) στο σημείο Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης

Και έχει εξίσωση: $\left(\delta\right):y-y_M=\lambda_\delta(x-x_M)\Leftrightarrow$

ΑΣΚΗΣΗ 5^{Η}

1) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου με συντεταγμένες $\mathrm{M}(4\sigma\upsilon\nu\omega, 5\eta\mu\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $\begin{cases} \mathrm{x} = 4\sigma\upsilon\nu\omega \\ \mathrm{y} = 5\eta\mu\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\mathrm{x}}{4} \\ \eta\mu\omega = \dfrac{\mathrm{y}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

2) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν του επιπέδου με συντεταγμένες $\mathrm{N}(3\eta\mu\omega, 2\sigma\upsilon\nu\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$