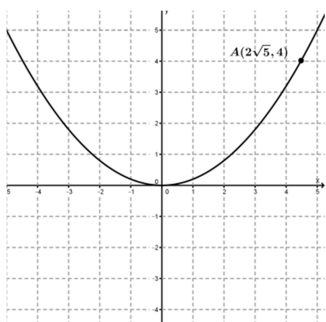
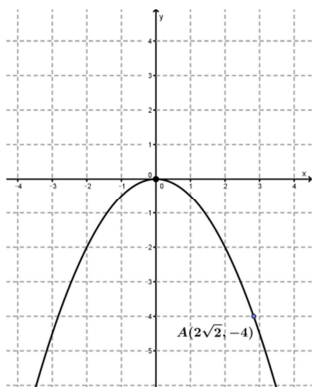
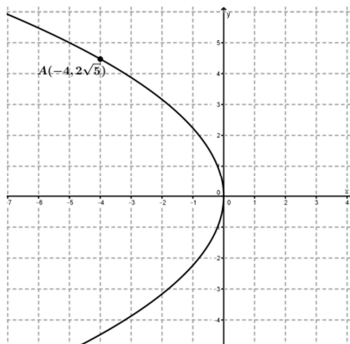
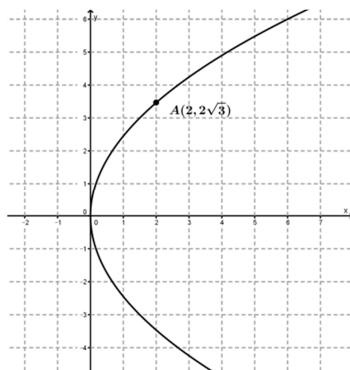


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1^Η

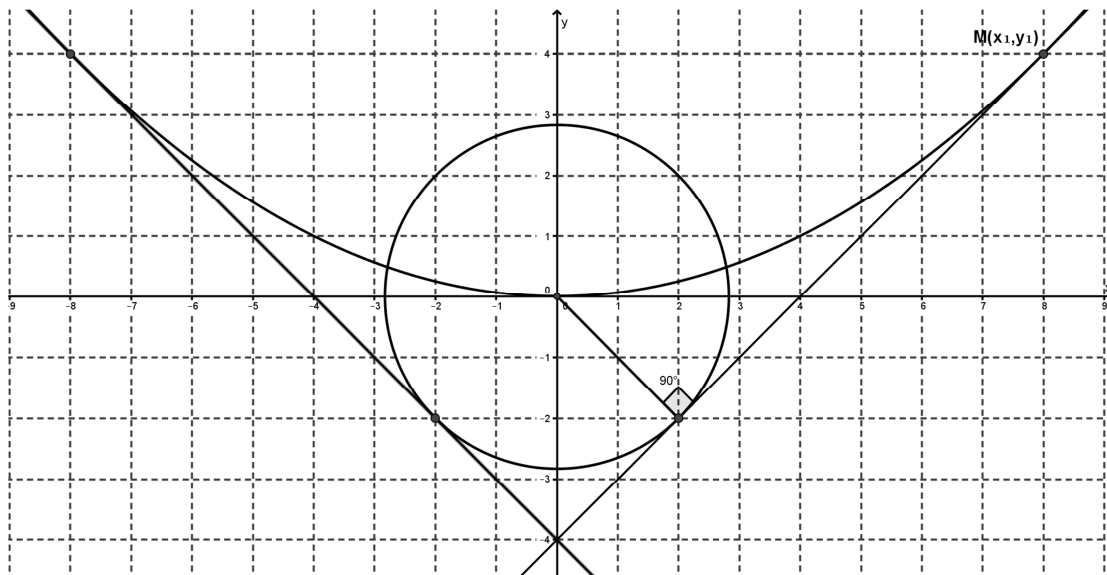
Να αναγνωριστούν οι εξισώσεις των παραβολών και να βρεθούν οι εστίες τους καθώς και οι εξισώσεις των εφαπτόμενων τους στα σημεία που δίνονται.



ΑΣΚΗΣΗ 2^Η (κοινή εφαπτομένη κύκλου και παραβολής - περίπτωση 1^Η)

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C_1 : x^2 = 16y$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = 8$.

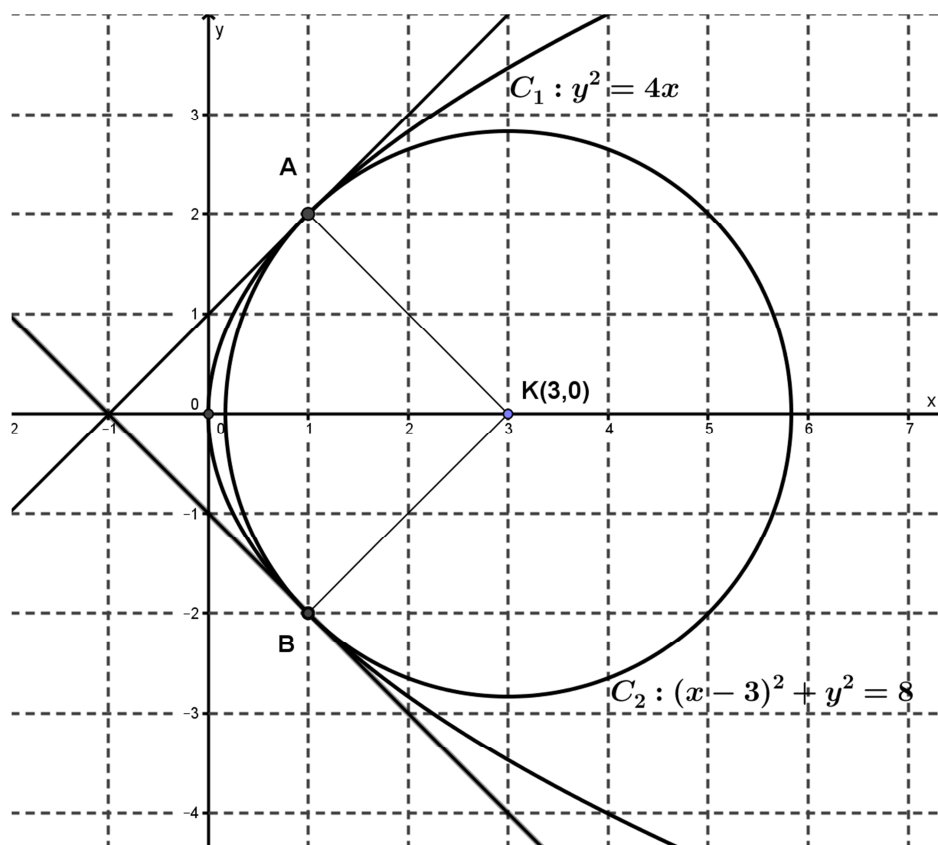
Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων τους.

ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 3^η (κοινή εφαπτομένη κύκλου και παραβολής - περίπτωση 2^η)

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C_1: y^2 = 4x$ και ο κύκλος $C_2: (x-3)^2 + y^2 = 8$.

Να δεχθεί ότι εφάπτονται, δηλαδή έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους.



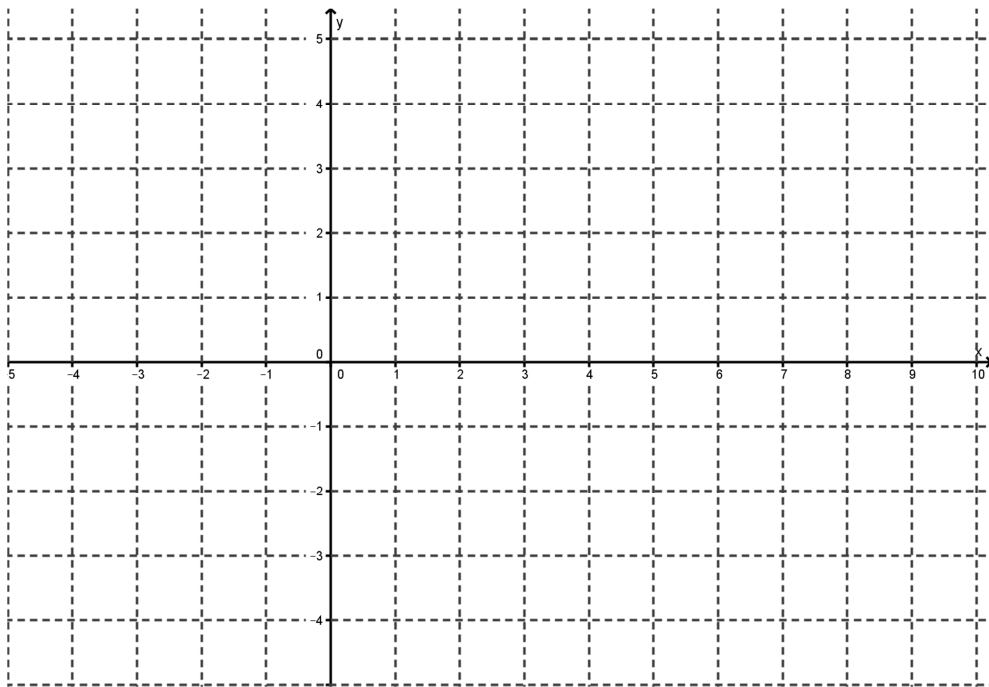
ΑΣΚΗΣΗ 4^η (ανακλαστική ιδιότητα παραβολής)

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C: y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(4,4)$

- A) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο A.
- B) Αν $B(7,4)$ να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{A}B$ όπου E η εστία της .

ΛΥΣΗ

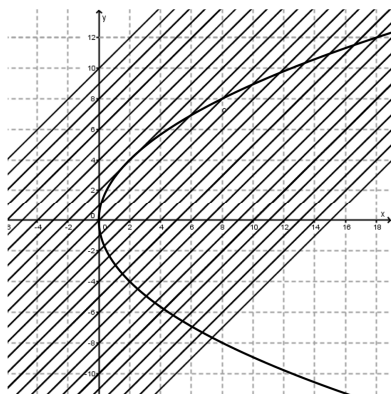
- Η παραβολή είναι της μορφής $y^2 = 2px$ άρα είναι $p = \dots\dots$ οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ άρα $\dots\dots\dots$
- Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο της A είναι: $yy_A = p(x + x_A)$
 άρα είναι: $\dots\dots\dots$



- Παρατηρούμε ότι τα σημεία A και B βρίσκονται $\dots\dots\dots$
- Οπότε σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής η διχοτόμος (δ) της γωνίας $E\hat{A}B$ θα είναι η $\dots\dots\dots$
- Έχουμε $\dots\dots\dots$
- Επομένως η εξίσωση της διχοτόμου θα είναι:
 $(\delta): y - y_A = \lambda_\delta (x - x_A) \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

ΑΣΚΗΣΗ 5^Η (σχετική θέση ευθείας και παραβολής - περίπτωση 1^Η)

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C: y^2 = 8x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + k$



Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

α) η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

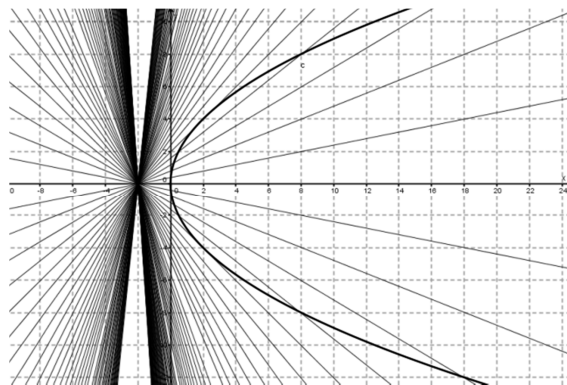
β) η ευθεία και η παραβολή έχουν δύο διακεκριμένα κοινά σημεία

γ) η ευθεία και η παραβολή έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το οποίο και να βρεθεί.
(ε ευθεία εφάπτεται της παραβολής).

ΑΣΚΗΣΗ 6^Η (σχετική θέση ευθείας και παραβολής - περίπτωση 2^Η)

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C: y^2 = 8x$. Να βρεθεί η εξίσωση της οικογένειας των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $P(-2,0)$ και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ .

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:



α) η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

β) η ευθεία και η παραβολή έχουν δύο διακεκριμένα κοινά σημεία

γ) η ευθεία και η παραβολή έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

(ε ευθεία εφάπτεται της παραβολής).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C_1: y^2 = 4x$ και ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.

Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων τους.

2. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C: y^2 = 8x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$

Η ευθεία και η παραβολή έχουν δύο διακεκριμένα κοινά σημεία. Το $O(0,0)$ και ένα άλλο σημείο A . Έστω M το μέσον της χορδής OA .

Να γραφούν οι συντεταγμένες του M συναρτήσει του $a \in \mathbb{R}^*$.

Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M .

3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C: y^2 = 12x$ και το σημείο της $A(12,12)$
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο A .
 - Αν $B(20,12)$ να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας \widehat{EAB} όπου E η εστία της.
4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C: y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + k$

Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

- η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο
 - η ευθεία και η παραβολή έχουν δύο διακεκριμένα κοινά σημεία
 - η ευθεία και η παραβολή έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το οποίο και να βρεθεί. (ε ευθεία εφάπτεται της παραβολής).
5. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C: y^2 = 4x$. Να βρεθεί η εξίσωση της οικογένειας των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $P(-4,0)$ και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ .
- Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:
- η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο
 - η ευθεία και η παραβολή έχουν δύο διακεκριμένα κοινά σημεία
 - η ευθεία και η παραβολή έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το οποίο και να βρεθεί. (ε ευθεία εφάπτεται της παραβολής).

6. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C_1: y^2 = 2x$ και ο κύκλος

$$C_2: (x-5)^2 + y^2 = 9.$$

Να δεχθεί ότι εφάπτονται, δηλαδή έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους.

7. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2x$ και το σημείο της $A(8,4)$.

Να βρεθεί σημείο B της παραβολής τέτοιο ώστε $\widehat{AOB} = 90^\circ$

(Απάντηση: $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$)

8. Δίνονται οι παραβολές με εξισώσεις $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: x^2 = 4y$

i) Να βρεθούν τα σημεία τομής τους.

ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων τους στο κοινό σημείο τους A (διαφορετικό από του $O(0,0)$).

iii) Να βρεθεί το σημείο B στο οποίο τέμνει η εφαπτόμενη στο A της C_1 την παραβολή C_2 και το σημείο Γ στο οποίο τέμνει η εφαπτόμενη στο A της C_2 την παραβολή C_1

iv) Ναδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ εφάπτεται συγχρόνως των δύο παραβολών.

