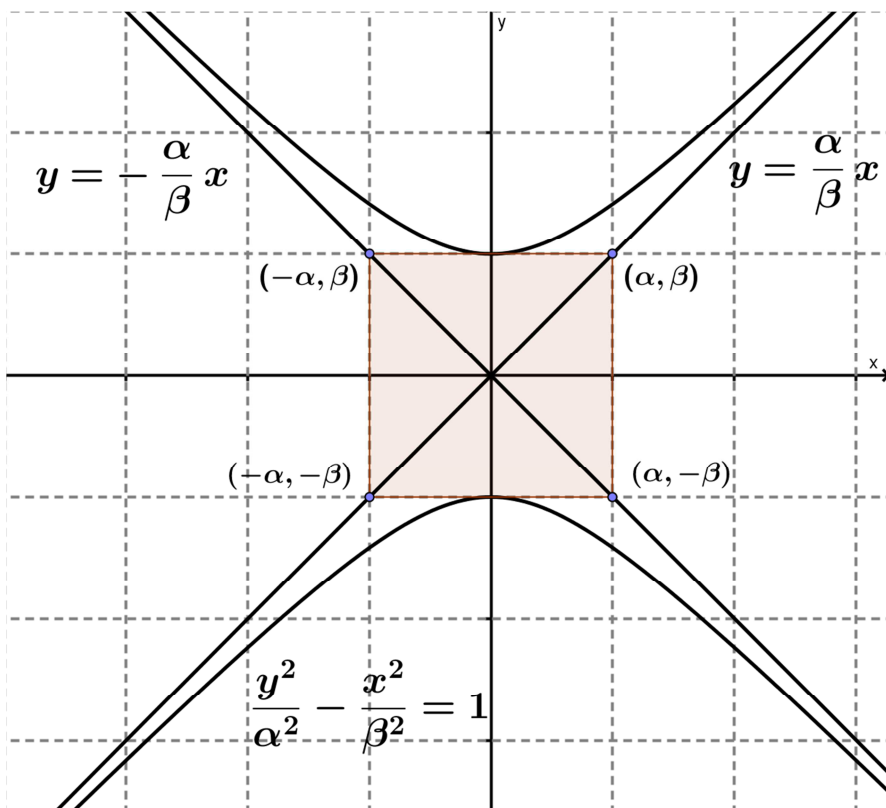


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ : Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ



ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2013-2014

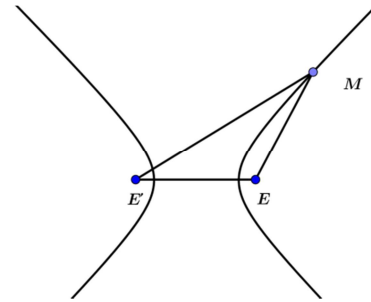
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΥΛΟΣ

ΧΑΛΑΤΖΙΑΝ

2ο ΓΕΛ ΣΥΚΕΩΝ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ****Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ**

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω  $E$  και  $E'$  δύο σημεία του επιπέδου. Υπερβολή με **εστίες** τα σημεία  $E$  και  $E'$  λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων τους από τα σημεία  $E$  και  $E'$  είναι σταθερή και μικρότερη από το  $(EE')$ .



- Η σταθερή διαφορά συμβολίζεται με  $2\alpha$  ( $\alpha > 0$ )
- Η απόσταση  $(EE')$  λέγεται **εστιακή απόσταση** και συμβολίζεται με  $2\gamma$  (προφανώς είναι  $0 < \alpha < \gamma$ )
- Για κάθε σημείο  $M$  της υπερβολής ισχύει:  $|(ME) - (ME')| = 2\alpha$
- Τα σημεία  $A', A$  λέγονται **κορυφές** της υπερβολής.

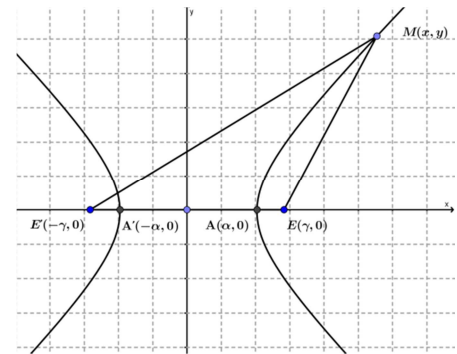
**ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ****1. Με εστίες στον άξονα  $x'x$  και κέντρο συμμετρίας το  $O(0,0)$** 

Η εξίσωση της υπερβολής  $C$  με εστίες τα σημεία  $E'(-\gamma, 0)$  και  $E(\gamma, 0)$  και σταθερή διαφορά  $2\alpha$  είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{με } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

Οι κορυφές της έλλειψης είναι:  $A'(-\alpha, 0)$ ,  $A(\alpha, 0)$ .

Κάθε σημείο  $M(x, y)$  της έλλειψης έχει συντεταγμένες  $x \leq -\alpha$  ή  $x \geq \alpha$  και  $y \in \mathbb{R}$

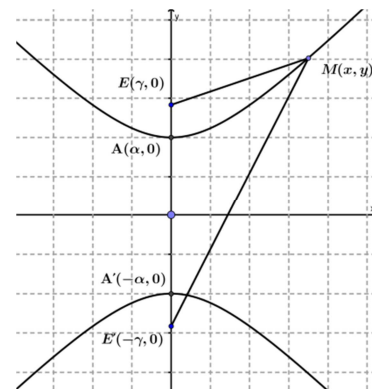
**2. Με εστίες στον άξονα  $y'y$  και κέντρο συμμετρίας το  $O(0,0)$** 

Η εξίσωση της υπερβολής  $C$  με εστίες τα σημεία  $E'(0, -\gamma)$  και  $E(0, \gamma)$  και σταθερή διαφορά  $2\alpha$  είναι:

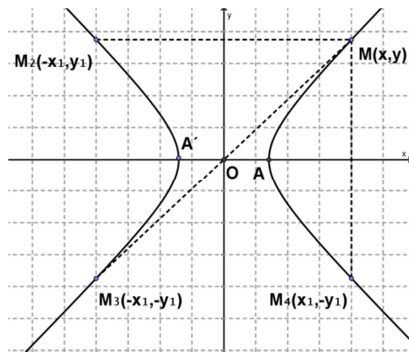
$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \quad \text{με } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

Οι κορυφές της υπερβολής είναι:  $A'(0, -\alpha)$ ,  $A(0, \alpha)$

Κάθε σημείο  $M(x, y)$  της υπερβολής έχει συντεταγμένες:  $y \leq -\alpha$  ή  $y \geq \alpha$  και  $x \in \mathbb{R}$



### ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ



Οι άξονες  $x'x$  και  $y'y$  είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής.

Το  $O(0,0)$  είναι κέντρο συμμετρίας της υπερβολής, είναι μέσον του  $(E'E)$  και λέγεται κέντρο της.

Όταν ένα σημείο  $M_1(x_1, y_1) \in C$  τότε λόγω των παραπάνω συμμετριών και τα σημεία  $M_2(-x_1, y_1)$ ,  $M_3(-x_1, -y_1)$ ,  $M_4(x_1, -y_1) \in C$

### ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

**Ορισμός:** ονομάζουμε εκκεντρότητα μιας υπερβολής και τη συμβολίζουμε με  $\varepsilon$  το

λόγο  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$  (αφού  $\alpha < \gamma$ )

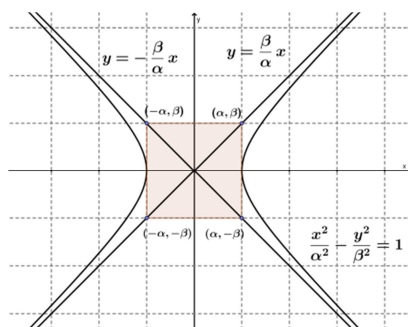
$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \varepsilon^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Η εκκεντρότητα είναι μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή μιας υπερβολής.

Όσο μικρότερη είναι η εκκεντρότητα μιας υπερβολής, τόσο πιο « κλειστή » είναι.

### ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

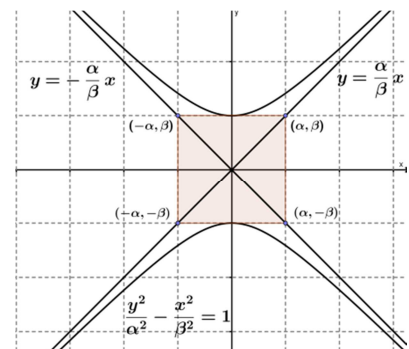


Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  είναι

οι ευθείες με εξισώσεις:  $y = \frac{\beta}{\alpha}x$  και  $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$  είναι οι

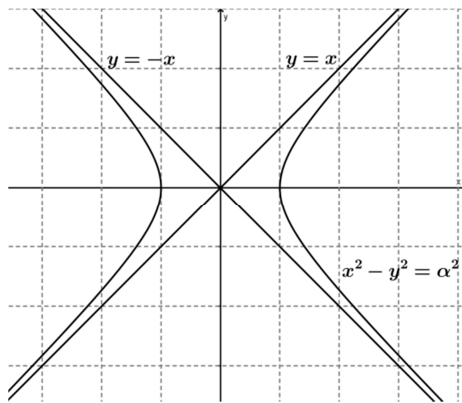
ευθείες με εξισώσεις:  $y = \frac{\alpha}{\beta}x$  και  $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$



### ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΒΑΣΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία  $(\alpha, \beta)$ ,  $(-\alpha, \beta)$ ,  $(-\alpha, -\beta)$ ,  $(\alpha, -\beta)$

λέγεται ορθογώνιο βάσης της υπερβολής και οι διαγώνιοί του είναι οι ασύμπτωτες της υπερβολής.

**ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ**

Όταν είναι  $\alpha = \beta$  ( $\gamma = \alpha\sqrt{2}$ ) τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής**.

Η εξίσωση της είναι:

$x^2 - y^2 = \alpha^2$  ή  $y^2 - x^2 = \alpha^2$  και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες  $y = x$  και  $y = -x$ .

Η εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής είναι  $\varepsilon = \sqrt{2}$ .

**ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ**

- Η εφαπτομένη της υπερβολής C:  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ , με  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$  στο

σημείο της  $M(x_1, y_1)$  είναι: 
$$\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται και ως εξής:  $\beta^2 x \cdot x_1 - \alpha^2 y \cdot y_1 = \alpha^2 \beta^2$

Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{\beta^2 \cdot x_1}{\alpha^2 \cdot y_1}$ ,  $y_1 \neq 0$

Στις κορυφές της Α' και Α η υπερβολή δέχεται κατακόρυφες εφαπτόμενες.

- Η εφαπτομένη της υπερβολής C:  $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ , με  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$  στο

σημείο της  $M(x_1, y_1)$  είναι: 
$$\frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} - \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} = 1$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται και ως εξής:  $\beta^2 y \cdot y_1 - \alpha^2 x \cdot x_1 = \alpha^2 \beta^2$

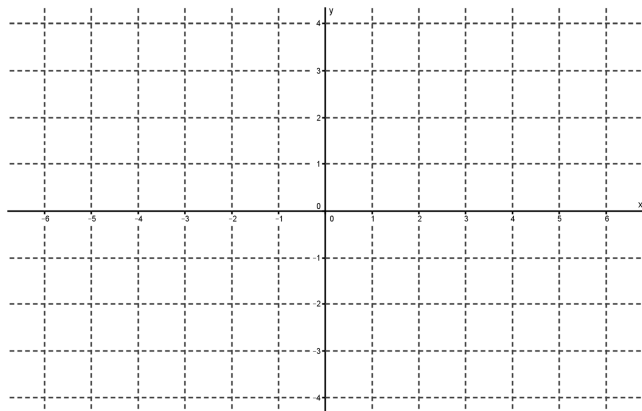
Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{\alpha^2 \cdot x_1}{\beta^2 \cdot y_1}$ ,  $y_1 \neq 0$

Στις κορυφές της Α' και Α η υπερβολή δέχεται οριζόντιες εφαπτόμενες.

**ΑΣΚΗΣΗ 1<sup>Η</sup>**

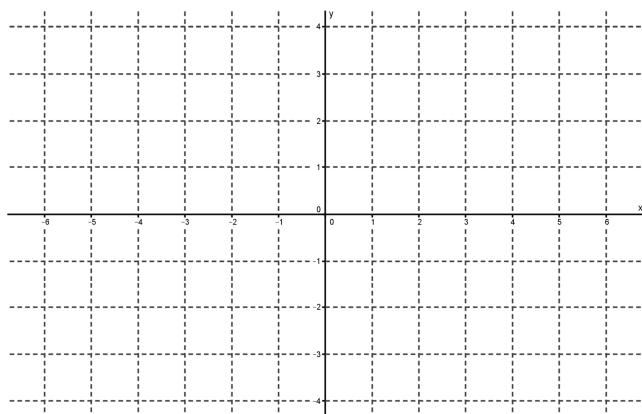
Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση:  $C: x^2 - 4y^2 = 4$

- Διαιρώ όλους τους όρους με το 4 :
- $\alpha^2 =$
- $\beta^2 =$
- $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 =$
- κορυφές:
- εστίες:
- εκκεντρότητα:  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} =$
- ασύμπτωτες:

**ΑΣΚΗΣΗ 2<sup>Η</sup>**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση:  $C: y^2 - x^2 = 4$

- Διαιρώ όλους τους όρους με το 4 :
- $\alpha^2 =$
- $\beta^2 =$
- $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 =$
- κορυφές:
- εστίες:
- εκκεντρότητα:  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} =$
- ασύμπτωτες:

**ΑΣΚΗΣΗ 3<sup>Η</sup>**

Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής με εστίες  $E'(-3\sqrt{2}, 0)$  και  $E(3\sqrt{2}, 0)$

**ΛΥΣΗ**

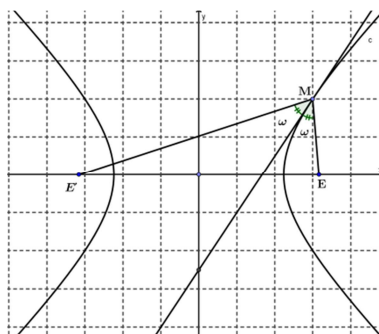
- από τη μορφή των εστιών έχουμε ότι η μορφή της εξίσωσης της ισοσκελούς υπερβολής είναι:
- επειδή η υπερβολή είναι ισοσκελής είναι:
- άρα η εξίσωση της είναι :

**ΑΣΚΗΣΗ 4<sup>Η</sup>**

Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον άξονα  $x'x$ , συμμετρικές ως προς το  $O(0,0)$ , εκκεντρότητα  $\varepsilon = 3$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $M(\sqrt{2}, -1)$

**ΛΥΣΗ**

- η εξίσωση της υπερβολής είναι της μορφής:
- αφού είναι  $\varepsilon=3$  άρα
- αφού  $M \in C$  άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της υπερβολής άρα:

**ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ**

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της  $M$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $E\hat{M}E$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 5<sup>Η</sup>**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $C: 2x^2 - y^2 = 9$  και το σημείο της  $M(3,3)$ .

Να βρεθούν οι εστίες της και οι κορυφές της.

Να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας  $E\hat{M}E$ .

**ΛΥΣΗ**

**ΑΣΚΗΣΗ 6<sup>Η</sup>**

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες

$$M\left(\frac{5}{\eta\mu\theta}, 7\sigma\varphi\theta\right), \quad \theta \in (0, \pi)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 7<sup>Η</sup>**

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες

$$M\left(\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}, 2\sqrt{3}\varepsilon\varphi\theta\right), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 8<sup>Η</sup>**

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των ευθειών:

$$(\varepsilon_1): x - y = \lambda \quad , \quad (\varepsilon_2): \lambda x + \lambda y = 1 \quad , \quad \lambda \neq 0$$

**ΛΥΣΗ**

**ΑΣΚΗΣΗ 9<sup>η</sup>**

Δίνονται οι υπερβολές με εξισώσεις  $C_1: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  και  $C_2: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

Ναδειχθεί ότι  $\frac{1}{\varepsilon_1^2} + \frac{1}{\varepsilon_2^2} = 1$  όπου  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι εκκεντρότητες των υπερβολών.

**ΛΥΣΗ**

$$\alpha_1^2 = \quad , \beta_1^2 = \quad , \gamma_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 =$$

$$\text{Άρα } \alpha_1 = \quad , \beta_1 = \quad , \gamma_1 = \quad , \varepsilon_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} =$$

$$\alpha_2^2 = \quad , \beta_2^2 = \quad , \gamma_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 =$$

$$\text{Άρα } \alpha_2 = \quad , \beta_2 = \quad , \gamma_2 = \quad , \varepsilon_2 = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} =$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{\varepsilon_1^2} + \frac{1}{\varepsilon_2^2} =$$

**ΑΣΚΗΣΗ 10<sup>η</sup>**

Για ποια τιμή του  $k$  η ευθεία  $(\varepsilon): 2x + y + k = 0$  εφάπτεται της υπερβολής

$$C: x^2 - y^2 = 3$$

**ΛΥΣΗ**

**ΑΣΚΗΣΗ 11<sup>Η</sup>**

Για ποια τιμή του  $k$  η ευθεία  $(\varepsilon): y = kx + 3$  εφάπτεται της υπερβολής

$$C: x^2 - y^2 = 3$$

**ΛΥΣΗ****ΑΣΚΗΣΗ 12<sup>Η</sup>**

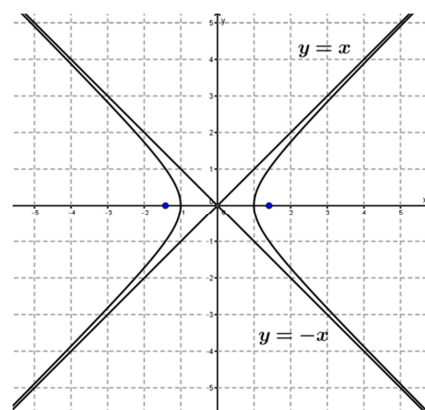
Να βρεθεί το είδος της καμπύλης που αντιστοιχεί στην εξίσωση  $\frac{x^2}{k-4} - \frac{x^2}{k+4} = 1$  για τις διάφορες τιμές του  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq \pm 4$

**ΛΥΣΗ**

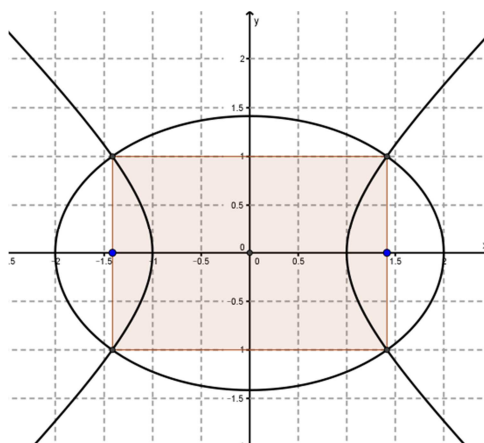
**ΑΣΚΗΣΗ 13<sup>Η</sup>**

Δίνεται η υπερβολή  $C: x^2 - y^2 = 1$

Α) να βρεθούν οι εστίες και οι ασύμπτωτες της υπερβολής.

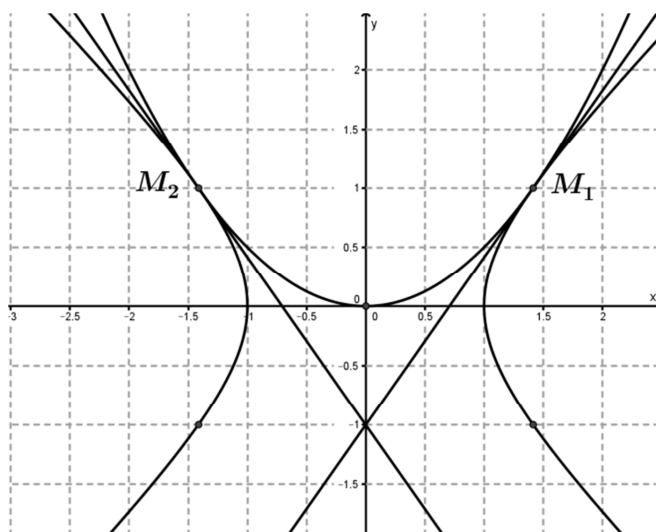


Β) να βρεθούν τα σημεία  $M$  της υπερβολής για τα οποία ισχύει  $(ME) + (ME') = 4$  όπου  $E$  και  $E'$  οι εστίες της υπερβολής.



Γ) αν είναι  $M_1(\sqrt{2}, 1)$ ,  $M_2(-\sqrt{2}, 1)$ ,  $M_3(-\sqrt{2}, -1)$ ,  $M_4(\sqrt{2}, -1)$  τα σημεία που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα ναδειχθεί ότι είναι κορυφές ορθογωνίου με εμβαδόν ίσο με  $4\epsilon$ , όπου  $\epsilon$  η εκκεντρότητα της υπερβολής.

Δ) να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή το  $O(0,0)$  και διέρχεται από τα σημεία  $M_1, M_2$ . Έπειτα ναδειχθεί ότι η παραβολή εφάπτεται της υπερβολής στα σημεία αυτά.



**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ**

1. Θεωρούμε τα σημεία  $M(2k-1, 3-k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$
- A) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M για τις διάφορες τιμές του  $k \in \mathbb{R}$
- B) να βρεθεί το σημείο A του γεωμετρικού τόπου που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .
- Γ) αν είναι B το σημείο του γεωμετρικού τόπου που βρίσκεται πάνω στον άξονα γ'γ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB.
- Δ) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων N του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $(NAB) = 20$ .
2. Θεωρούμε τα σημεία  $M(\sqrt{2}\eta\mu\omega - 2, \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\omega + 2)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$
- A) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M για τις διάφορες τιμές του  $\omega \in \mathbb{R}$
- B) δίνεται η παραμετρική ευθεία (ε):  $x + y = \mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Να βρεθούν οι τιμές του  $\mu$  για τις οποίες:
- i) Η (ε) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον γ.τ του M  
 ii) Η (ε) εφάπτεται του γ.τ του M.  
 iii) Η (ε) τέμνει τον γ.τ του M σε δύο διακεκριμένα σημεία.
3. Δίνονται οι εξισώσεις:  $(k+2)x + ky - 1 = 0$  (1) και
- $$(k+5)x + 2y - 2 = 0$$
- (2),
- $k \in \mathbb{R}$
- i) Να δειχθεί ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του  $k \in \mathbb{R}$
- ii) Για ποιες τιμές του k οι ευθείες είναι κάθετες;
- iii) Για ποια τιμή του k οι ευθείες ταυτίζονται;
- iv) Για ποιες τιμές του k οι ευθείες είναι παράλληλες;
- Ποια είναι τότε η απόστασή τους;
4. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση (ε):  $x - y - 3 = 0$
- i) Να βρεθεί το συμμετρικό B του A ως προς την ευθεία (ε)
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου  $C_1$  με κέντρο το B που αποκόπτει από την (ε) χορδή μήκους  $4\sqrt{2}$ .
- iii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου  $C_2$  που εφάπτεται εσωτερικά του  $C_1$  και έχει κέντρο το  $\Gamma(0,3)$ .

5. Δίνεται η εξίσωση  $(k+1)x + (3k-7)y + 19 - 11k = 0$  ,  $k \in \mathbb{R}$
- α) ναδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε  $k \in \mathbb{R}$
- β) ναδειχθεί ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.
- γ) αν  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι ευθείες της οικογένειας για  $k=2$  και  $k=3$  να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν.
- δ) αν  $(\varepsilon_3): x + y - 1 = 0$  να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  ,  $\varepsilon_2$  ,  $\varepsilon_3$  .
6. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 2kx + 2(1+k)y + 2k + 1 = 0$  ,  $k \in \mathbb{R}^*$
- i) Ναδειχθεί ότι παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του  $k \in \mathbb{R}^*$
- ii) Ποιος ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της οικογένειας;
- iii) Ναδειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.
- iv) Ναδειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας εφάπτονται στην ευθεία με εξίσωση  $(\delta): x - y + 1 = 0$
7. Δίνεται η παραβολή  $C_1: x^2 = 3y$  και ο κύκλος  $C_2: x^2 + y^2 = 4$
- α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες της παραβολής και του κύκλου.
- β) Αν είναι A και B τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά καθώς και η οξεία γωνία που σχηματίζουν .
8. Δίνεται η εξίσωση  $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{3+k} = 1$  (1)
- α) για ποιές τιμές του  $k \in \mathbb{R}$  ,  $k \neq 9$  ,  $k \neq -3$  η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη;
- β) για ποιές τιμές του  $k \in \mathbb{R}$  ,  $k \neq 9$  ,  $k \neq -3$  η εξίσωση (1) παριστάνει υπερβολή; Για ποια τιμή του k η υπερβολή είναι ισοσκελής;
- γ) για ποιά τιμή του  $k \in \mathbb{R}$  ,  $k \neq 9$  ,  $k \neq -3$  η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο;