

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ , να δείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 10**

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta$$

**β)** Για κάθε συνάρτηση  $f$  η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της  $C_f$ , που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$ , και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ , των τμημάτων της  $C_f$ , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$ , και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

δ) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε και η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ε) Έστω  $P(x), Q(x)$  πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , με βαθμό του αριθμητή  $P(x)$  μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < 0 < \beta$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ .

Αν ισχύει  $f(\alpha) = 5\beta$  και  $f(\beta) = 5\alpha$ , να αποδείξετε ότι:

**B1.** Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 10**

**B2.** Υπάρχει σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon: x - 5y + 2010 = 0$

**Μονάδες 10**

**B3.** Η συνάρτηση  $f$  παίρνει την τιμή  $\frac{5}{2}(\alpha + \beta)$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε την εξίσωση  $z^2 - 6z + \gamma = 0$  με  $\gamma \in \mathbb{R}$ , η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  με  $\text{Im}(z_1) > 0$  και  $|z_1| = 5$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\gamma = 25$ .

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Αν  $\gamma = 25$ , να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Αν για τον μιγαδικό αριθμό  $w$  ισχύει  $|w - z_1| = |w - z_2|$ , να αποδείξετε ότι  $w \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να βρείτε την παράγωγο της  $f$ :

**α.** στο ανοικτό διάστημα  $(-3, 3)$  (Μονάδες 3)

**β.** στο σημείο  $x_0 = -3$  (Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

**Μονάδες 9**

**Δ4.** Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**