

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

β) Έστω  $M(x, y)$  η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z = x + yi$  στο μιγαδικό επίπεδο.  
Τι ορίζουμε ως μέτρο του  $z$ ;

**Μονάδες 5**

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή ( $\Lambda$ ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν  $z$  μιγαδικός αριθμός και  $\bar{z}$  ο συζυγής του, τότε ισχύει

$$|z|^2 = z \bar{z} .$$

**Μονάδες 2**

2. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$ , τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| .$$

**Μονάδες 2**

3. Ισχύει  $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$ .

**Μονάδες 2**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

4. Ισχύει  $\int e^x dx = e^{2x} + c$  ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

5. Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 3+i \text{ και } z_2 = 1-3i .$$

α) Να αποδείξετε ότι  $\frac{z_1}{z_2} = i$  και  $|iz_1 + z_2|^2 = 0$  .

**Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι  $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$  .

**Μονάδες 8**

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό

$$w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2} , \quad k \in \mathbb{R} - \{1\} .$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $k \in \mathbb{R} - \{1\}$  ισχύει  $\text{Im}(w) = -1$  .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x , & x \leq 0 \\ x \ln x , & x > 0 \end{cases} \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} .$$

A) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0=0$  .

**Μονάδες 10**

B) Αν για τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει  $\alpha = -1$  :

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

i) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=0$  .

**Μονάδες 5**

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

**Μονάδες 5**

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=e$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x - \ln x + e^x, \quad x \in (1, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

β) Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

**Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=2005$  έχει μοναδική λύση στο διάστημα  $(1, +\infty)$  .

**Μονάδες 6**

δ) Έστω  $\Pi = \int_2^e f(x) dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$ . Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\Pi - 2\ln 2$  .

**Μονάδες 7**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ