1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

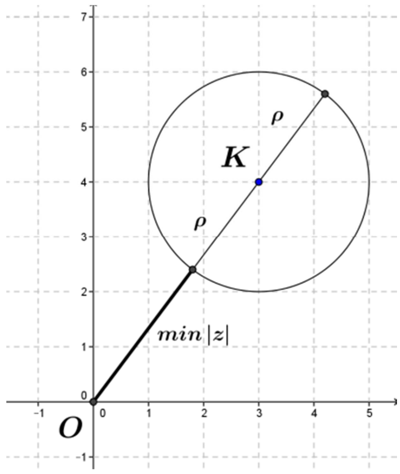
ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδειχθεί ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (σχολικό βιβλίο σελ.)

Β. Τι ονομάζεται μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού; (σχολικό βιβλίο σελ.)

Γ. ΛΑΘΟΣ-ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ-ΣΩΣΤΟ-ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β



Α) $|(1-2i)z-11+2i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(1-2i)z-(11-2i)| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$

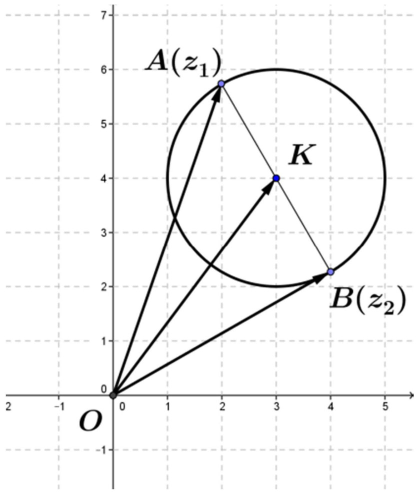
$$\left|(1-2i)\left(z-\frac{11-2i}{1-2i}\right)\right| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-2i| \cdot |z-(3+4i)| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{5} \cdot |z-(3+4i)| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |z-(3+4i)| = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ(z) είναι ο κύκλος με κέντρο το Κ(3,4) και ακτίνα ρ=2.

Β) $(OK) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\min|z| = (OK) - \rho = 5-2 = 3$
$\max|z| = (OK) + \rho = 5+2 = 7$ άρα είναι $3 \le |z| \le 7$



Γ) αφού για τους z_1, z_2 που ικανοποιούν τη σχέση (1) ισχύει $|z_1 - z_2| = 4 = 2\rho$, άρα οι εικόνες τους είναι σημεία αντιδιαμετρικά του κύκλου.

Έχουμε $|z_1+z_2| = |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = |2\cdot\overrightarrow{OK}| = 2\cdot 5 = 10$

Δ) αν w=x+yi έχουμε: $|w-2| = |w+2| \Leftrightarrow |(x-2)+yi| = |(x+2)+yi|$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Ν(w) είναι η ευθεία x=0 , δηλαδή ο άξονας y΄y.
Η ελάχιστη δυνατή τιμή του $|z-w|$ είναι η απόσταση του κύκλου από τον άξονα y΄y.

Άρα $\min|z-w| = d(K, y'y) - \rho = 3-2 = 1$

ΘΕΜΑ Γ

Α) $w \in I \Leftrightarrow w = -\bar{w} \Leftrightarrow (z+i)\cdot(\bar{z}+i) = -(\bar{z}-i)\cdot(z-i)$

$z\bar{z} + iz + i\bar{z} - 1 = -z\bar{z} + iz + i\bar{z} + 1 \Leftrightarrow$

$2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Β) είναι $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

Έχουμε ότι $|z^2 - 2z + 3| = |\overline{z^2 - 2z + 3}| = |\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 3| =$

$$\left|\frac{1}{z^2} - 2\frac{1}{z} + 3\right| = \left|\frac{3z^2 - 2z + 1}{z^2}\right| = \frac{|3z^2 - 2z + 1|}{|z|^2} = |3z^2 - 2z + 1|$$

Γ) για να δειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού $v = \dfrac{2+3zi}{2zi+3}$ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο αρκεί να δειχθεί ότι $|v| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2+3zi}{2zi+3}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|2+3zi|}{|2zi+3|} = 1 \Leftrightarrow |2+3zi| = |2zi+3| \Leftrightarrow |2+3zi|^2 = |2zi+3|^2$

$(2+3zi)(2-3\bar{z}i) = (2zi+3)(-2\bar{z}i+3) \Leftrightarrow$

$4 - \cancel{6\bar{z}i} + \cancel{6zi} + 9z\bar{z} = 4z\bar{z} + \cancel{6zi} - \cancel{6\bar{z}i} + 9 \Leftrightarrow 5z\bar{z} = 5 \Leftrightarrow |z| = 1$ που ισχύει από το (Α).

Γ) έχουμε $\bar{u} = \dfrac{(\bar{z}-i)^5}{\bar{z}^5 - i} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{z} - i\right)^5}{\left(\dfrac{1}{z}\right)^5 - i} = \dfrac{\dfrac{(1-iz)^5}{z^5}}{\dfrac{1-iz^5}{z^5}} = \dfrac{(-i^2 - iz)^5}{-i^2 - iz^5} = \dfrac{(-i)^5(i+z)^5}{-i(i+z^5)} = \dfrac{(i+z)^5}{i+z^5} = u$

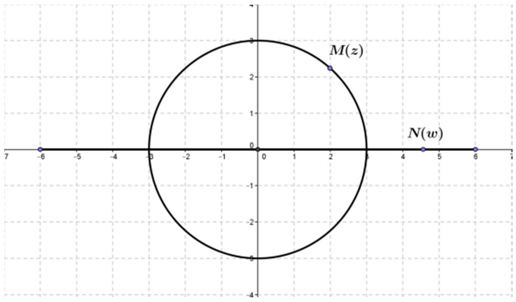
άρα ο u είναι πραγματικός.

Ε) επειδή είναι $|z-b| = |b-z|$ σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$|b-z| + |b+z| = |z-b| + |b+z| \geq |(z-b)+(b+z)| = |2z| = 2|z| = 2$

ΘΕΜΑ Δ

Α) έχουμε $|z| = 3 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow z\bar{z} = 9 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{9}{z}$



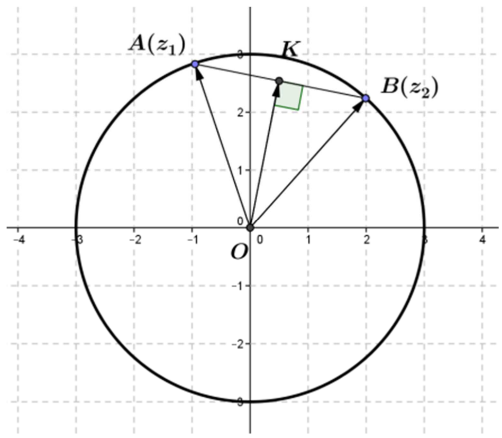
Άρα $w = z + \dfrac{9}{z} = z + \bar{z} = 2\cdot x$, $\acute{o}\pi o \upsilon$ $z = x + yi$

άρα $w \in \mathbb{R}$

Όμως $-3 \le x \le 3$ άρα $-6 \le 2x \le 6 \Leftrightarrow -6 \le w \le 6$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι το ευθύγραμμο τμήμα του άξονα x΄x με άκρα τα σημεία (-6,0) και (6,0) .

η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w είναι $|z-w| = |z-(z+\overline{z})| = |\overline{z}| = |z| = 3$ (σταθ.)



Β) $|z_1+z_2| = |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = |2\cdot\overrightarrow{OK}| = 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Διότι είναι $(OK)^2 = (OA)^2 - (AK)^2 \Leftrightarrow (OK)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$

.

Άρα $(OK) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

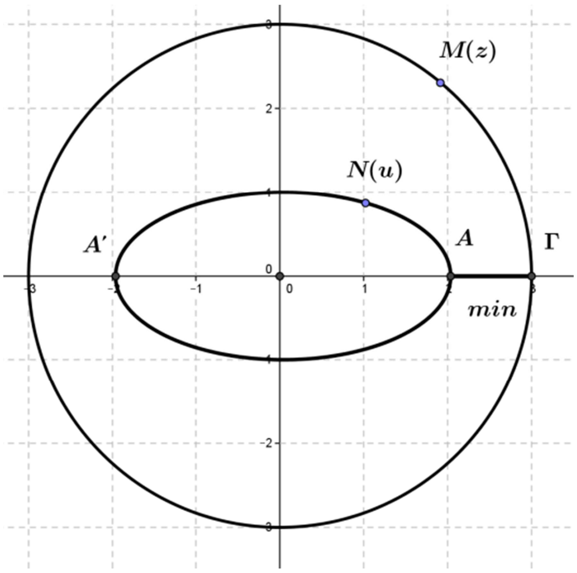
Γ) $u = (2\sigma\upsilon\nu\theta) + (\eta\mu\theta)i \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$

Έστω $u = x + yi \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}$

Άρα $\begin{cases} x = 2\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = \eta\mu\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{2} \\ \eta\mu\theta = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{x^2}{4} \\ \eta\mu^2\theta = y^2 \end{cases} \overset{(+)}{\Longleftrightarrow} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του u είναι η έλλειψη με εστίες στον άξονα x΄x ,

α=2 και β=1 (άρα $\gamma = \sqrt{a^2-\beta^2} = \sqrt{3}$)



Δ) $\min|z-u| = (A\Gamma) = \rho - \alpha = 3-2 = 1$

$\max|z-u| = (A'\Gamma) = \rho + \alpha = 3+2 = 5$

Άρα $1 \le |z-u| \le 5$