1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδειχθεί ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (10 μονάδες)

Β. Τι ονομάζεται μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού; (5 μονάδες)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).

α) Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύει $z^2 + w^2 = 0$ τότε αναγκαστικά θα είναι $z = w = 0$

β) Για κάθε μιγαδικό $z \neq 0$ ισχύει ότι $z^0 = 1$

γ) Αν είναι $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ τότε $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} i$

δ) Οι εικόνες δύο αντίθετων μιγαδικών αριθμών είναι συμμετρικές ως προς το σημείο Ο(0,0).

ε) Αν είναι $|z|^2 = -z^2$ τότε αναγκαστικά ο z είναι φανταστικός αριθμός.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει: $|(1-2i)z - 11 + 2i| = 2\sqrt{5}$ (1)

Α) να δειχθεί ότι ισχύει $|z - 3 - 4i| = 2$ και να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ(z).

(8 μονάδες)

Β) να βρεθούν η ελάχιστη και η μέγιστη δυνατή τιμή του $|z|$. (6 μονάδες)

Γ) αν είναι z_1, z_2 δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) για τους οποίους ισχύει $|z_1 - z_2| = 4$ να υπολογιστεί το μέτρο $|z_1 + z_2|$. (5 μονάδες)

Δ) αν για το μιγαδικό w ισχύει $|w-2| = |w+2|$

i) ποιός ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας N(w); (3 μονάδες)

ii) ποιά η ελάχιστη δυνατή τιμή του $|z-w|$; (3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ότι ο μιγαδικός $w=(z+i)\cdot(\overline{z}+i)$ είναι φανταστικός.

Α) να δειχθεί ότι $|z|=1$ (5 μονάδες)

Β) να δειχθεί ότι $|z^2-2z+3|=|3z^2-2z+1|$ (5 μονάδες)

Β) να δειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού $v=\dfrac{2+3zi}{2zi+3}$ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο. (5 μονάδες)

Γ) να δειχθεί ότι ο μιγαδικός $u=\dfrac{(z+i)^5}{z^5+i}$ είναι πραγματικός. (5 μονάδες)

Δ) για κάθε μιγαδικό b να δειχθεί ότι ισχύει $|b-z|+|b+z|\geq 2$ (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μιγαδικός z με $|z|=3$ (1)

Α) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού $w=z+\dfrac{9}{z}$ (5 μονάδες)

και να δειχθεί ότι η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w είναι σταθερή.

(2 μονάδες)

Β) αν είναι z_1, z_2 δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) για τους οποίους ισχύει $|z_1-z_2|=3$, να υπολογιστεί το μέτρο $|z_1+z_2|$. (6 μονάδες)

Γ) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού $u=(2\sigma\upsilon\nu\theta)+(\eta\mu\theta)i$, $\theta\in\mathbb{R}$

(6 μονάδες)

Δ) να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη δυνατή τιμή του $|z-u|$ (6 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΧΑΛΑΤΖΙΑΝ ΠΑΥΛΟΣ