2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδειχθεί ότι $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$, $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ (9 μονάδες)

Β. Τι παριστάνει η εξίσωση $|z-z_o|=\rho>0$, όπου z_o ένας γνωστός μιγαδικός ; (3 μονάδες)

Γ. Τι παριστάνει η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$, όπου z_1 , z_2 δύο γνωστοί μιγαδικοί ; (3 μονάδες)

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).

α) Ισχύει πάντα ότι $|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$, $\forall z_1,z_2\in C$

β) Αν είναι $|z-z_0|+|w-w_0|=0$ τότε αναγκαστικά είναι $z=z_0$ *και* $w=w_o$

γ) Αν είναι $z^2=\overline{z}^2$ *τότε* $z\in\mathbb{R}$ *ή* $z\in I$

δ) Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.

ε) Αν είναι $i^\nu=-i$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε ο (ν-3) είναι πολλαπλάσιο του 4.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει: $|2z-5|=|z-4|$ (1)

Α) να δειχθεί ότι ισχύει $|z-2|$=1 και να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ(z).

(6 μονάδες)

Β) να δειχθεί ότι $4\le|z-5+4i|\le6$. (6 μονάδες)

Γ) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού $w=z-2-\dfrac{1}{z-2}$, $z\neq2$

(5 μονάδες)

και να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w

(3 μονάδες)

Δ) Αν οι μιγαδικοί z_1,z_2 ικανοποιούν την (1) και είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4x+k=0$, $k\in\mathbb{R}$, να βρεθούν οι z_1,z_2 καθώς επίσης και η τιμή της παραμέτρου k.

(5 μονάδες)

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΧΑΛΑΤΖΙΑΝ ΠΑΥΛΟΣ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ότι ο μιγαδικός $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Α) να δειχθεί ότι $\alpha = \beta = 1$ (5 μονάδες)

Β) αν z_2 η άλλη ρίζα της εξίσωσης να δειχθούν οι σχέσεις: $z_1^2 = z_2$, $z_1^3 = z_2^3 = 1$ (6 μονάδες)

Γ) να δειχθεί ότι $z_1^{2015} + \frac{1}{z_2^{2014}} + 1 = 0$ (5 μονάδες)

Δ) αν για το μιγαδικό w ισχύει $\left|w + \frac{1}{2}\right| + \left|2\overline{w} + 1\right| = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$, να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος

της εικόνας M(w) είναι κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5 μονάδες)

Ε) να βρεθεί η τιμή της παράστασης $K = |w - z_1|^2 + |w - z_2|^2$, όπου w ο μιγαδικός του

παραπάνω ερωτήματος (4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $|z| = 2$ (1)

Α) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού $w = z + \frac{8}{z}$, $z \neq 0$ (5 μονάδες)

και να δειχθεί ότι η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w είναι σταθερή.

(2 μονάδες)

Β) αν είναι z_1, z_2 δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) για τους οποίους ισχύει

$|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$, να υπολογιστεί το μέτρο $|z_1 + z_2|$. (6 μονάδες)

Γ) αν w_1, w_2 είναι δύο μιγαδικοί που βρίσκονται στον γεωμετρικό τόπο του **w** για τους

οποίους είναι $|w_1 - w_2| = 12$, να βρεθεί η τιμή του μέτρου $|w_1 + w_2|$. (6 μονάδες)

Δ) αν για τις εικόνες των μιγαδικών u_1, u_2 ισχύει ότι $\Gamma(u_1)$ εσωτερικό σημείο του κύκλου M(z) και $\Delta(u_2)$ εξωτερικό σημείο του κύκλου M(z) να δειχθεί ότι $|4 - \overline{u}_1 \cdot u_2| < 2 \cdot |u_1 - u_2|$.

(6 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΧΑΛΑΤΖΙΑΝ ΠΑΥΛΟΣ