2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (σελ.)

Β. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (σελ.)

Γ. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (σελ.)

Δ. ΣΩΣΤΟ-ΣΩΣΤΟ-ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ-ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Α) Θέτω $z-2=u \Leftrightarrow z=u+2$

$$(1) \Rightarrow \left|2(u+2)-5\right|=\left|u+2-4\right| \Leftrightarrow \left|2u-1\right|=\left|u-2\right|$$
$$\Leftrightarrow \left|2u-1\right|^2=\left|u-2\right|^2 \Leftrightarrow (2u-1)(2\overline{u}-1)=(u-2)(\overline{u}-2)$$
$$\Leftrightarrow 4u\overline{u}-2u-2\overline{u}+1=u\overline{u}-2u-2\overline{u}+4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |u|=1$$

Άρα $|z-2|=1$, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ(z) είναι ο κύκλος με κέντρο το Κ(2,0) και ακτίνα ρ=1.

Β) έχουμε $|z-5+4i|=|z-(5-4i)|$. Έστω $P(5,-4)$

Άρα $\max|z-5+4i|=(PK)+\rho=5+1=6$

Και $\min|z-5+4i|=(PK)-\rho=5-1=4$. Άρα $4\le|z-5+4i|\le 6$

Γ) Έχουμε $|z-2|=1 \Leftrightarrow |z-2|^2=1 \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}-2)=1 \Leftrightarrow \overline{z}-2=\dfrac{1}{z-2}$

Άρα $w=z-2-\dfrac{1}{z-2} \Leftrightarrow w=z-2-(\overline{z}-2)=z-\overline{z} \overset{z=x+yi}{=} 2yi$

Άρα $N(w)\in y'y$. Όμως $-1\le y\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2y\le 2 \Leftrightarrow -2\le w\le 2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού w είναι το ευθύγραμμο τμήμα του άξονα y΄y με άκρα $A(0,-2)$ $\kappa\alpha\iota$ $B(0,2)$

Έχουμε $(MN)=|w-z|=|z-\overline{z}-z|=|-\overline{z}|=|z|$

Άρα $\min|w-z|=\min|z|=(OK)-\rho=2-1=1$

Και $\max|w-z|=\max|z|=(OK)+\rho=2+1=3$

Δ) Επειδή είναι $z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=4$.

Αν $z_1,z_2\in\mathbb{R}$ τότε προφανής λύση

είναι $z_1=1$, $z_2=3$

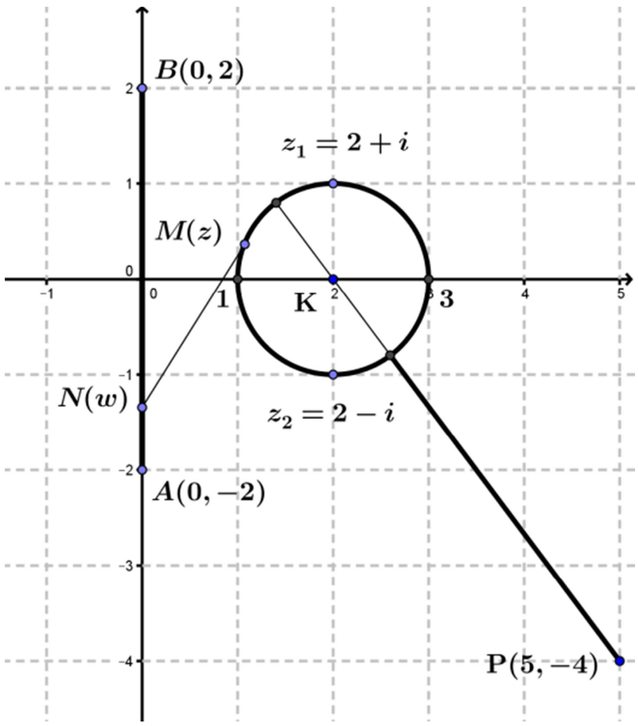
Άρα $z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\kappa\Leftrightarrow\kappa=3$

Αν $z_1,z_2\in C$ τότε $z_2=\overline{z}_1$, άρα

$z_1+\overline{z}_1=4\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1)=4\Leftrightarrow\operatorname{Re}(z_1)=2$

Επειδή όμως οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 βρίσκονται στον κύκλο του z άρα

(βλέπε σχήμα)



είναι $z_1=2+i$, $z_2=2-i$

Έχουμε $z_1\cdot z_2=(2+i)(2-i)=5$

Όμως $z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\kappa\Leftrightarrow\kappa=5$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Α) είναι γνωστό ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι η συζυγής της. Άρα $z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Επειδή είναι $z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\kappa$, $z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lambda$

Όμως $z_1+z_2=\ldots=-1$, $z_1\cdot z_2=\ldots=1$

Άρα είναι $\kappa=1$ $\kappa\alpha\iota$ $\lambda=1$

Β) έχουμε $z_1^2=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\ldots=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=z_2$

Αφού $z_1^2+z_1+1=0\overset{\cdot z_1}{\Leftrightarrow}z_1^3+z_1^2+z_1=0\Leftrightarrow z_1^3=-z_1^2-z_1=1$

Γ) έχουμε $2015=3\cdot 671+2$, $2014=3\cdot 670+1$

Άρα $z_1^{2015}=\left(z_1^3\right)^{671}\cdot z_1^2=1^{671}\cdot z_1^2=z_1^2$

και $z_2^{2014} = \left(z_2^{\ 3}\right)^{670} \cdot z_2 = \ldots = z_2 = \overline{z}_1$

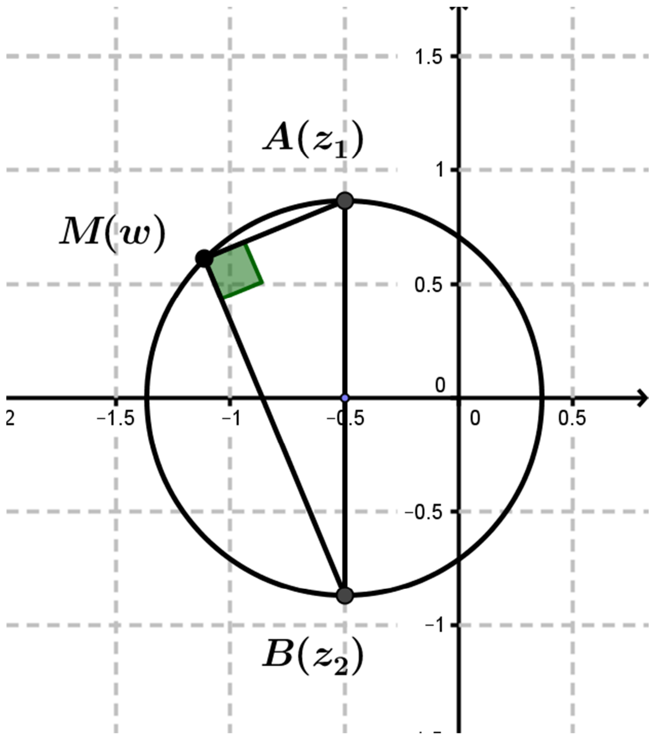
άρα έχουμε : $z_1^{2015} + \dfrac{1}{z_2^{\ 2014}} + 1 = z_1^{\ 2} + \dfrac{1}{z_2} + 1 = z_1^{\ 2} + z_1 + 1 = 0 \quad (z_1 z_2 = 1)$

Δ) έχουμε: $\left|w + \dfrac{1}{2}\right| + \left|2\overline{w} + 1\right| = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left|w + \dfrac{1}{2}\right| + 2\left|\overline{w} + \dfrac{1}{2}\right| = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left|w + \dfrac{1}{2}\right| + 2\left|w + \dfrac{1}{2}\right| = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$3\left|w + \dfrac{1}{2}\right| = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left|w + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M(w) είναι κύκλος με κέντρο $K\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ε) Παρατηρούμε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $A(z_1)$, $B(z_2)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του παραπάνω κύκλου (βλέπε σχήμα) . Άρα για κάθε σημείο M(z) του κύκλου η γωνία $A\hat{M}B = 90^0$, Άρα ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.



Έχουμε $K = \left|w - z_1\right|^2 + \left|w - z_2\right|^2 = (AM)^2 + (BM)^2 = (AB)^2 = (2\rho)^2 = 3$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Α) Έχουμε: $|z|=2 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=4 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{4}{z} \Leftrightarrow 2\overline{z}=\frac{8}{z}$

$w=z+\frac{8}{z}=z+2\overline{z}\overset{z=\alpha+\beta i}{=}3\alpha-\beta i$. Έστω $w=x+yi$

Άρα έχουμε $\begin{cases} x=3\alpha \\ y=-2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{x}{3} \\ \beta=-y \end{cases} \underset{\alpha^2+\beta^2=4}{\overset{|z|=2}{\Leftrightarrow}} \frac{x^2}{9}+y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

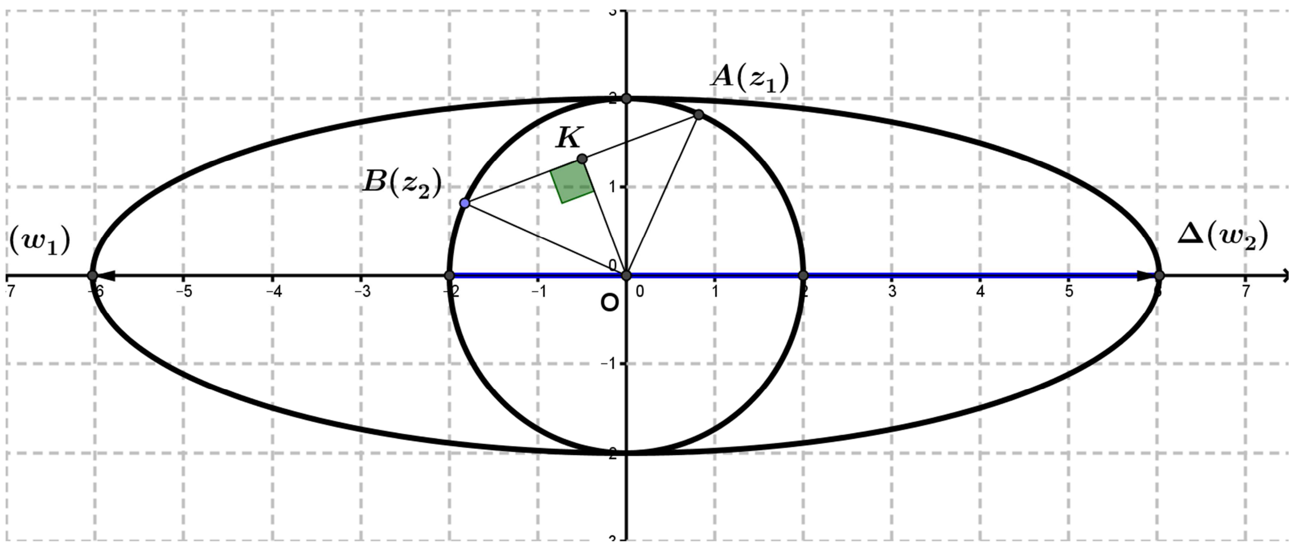
Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού w είναι η έλλειψη με εστίες στον άξονα x′x και $\alpha=6$, $\beta=2$, $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{32}=6\sqrt{2}$

Έχουμε $|w-z|=\left|z+\frac{8}{z}-z\right|=\left|\frac{8}{z}\right|=\frac{8}{|z|}=\frac{8}{2}=4=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$

Β) Προφανώς ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z είναι ο κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου **ή** με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε $|z_1+z_2|=2\sqrt{2}$.

Γ) αφού w_1, w_2 είναι δύο μιγαδικοί που βρίσκονται στον γεωμετρικό τόπο του **w** για τους οποίους είναι $|w_1-w_2|=12$ αναγκαστικά οι εικόνες τους βρίσκονται στις κορυφές του μεγάλου άξονα , άρα έχουμε $|w_1+w_2|=\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}\right|=0$, $\alpha\varphi o\acute{\upsilon}$ $\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}=-\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$.



Δ) αφού η εικόνα του u_1 είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου του z , ενώ η εικόνα του u_2 είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου του z.

Άρα είναι $|u_1| < 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad |u_2| > 2 \qquad (2)$

Έχουμε: $|4 - \bar{u}_1 \cdot u_2| < 2 \cdot |u_1 - u_2| \Leftrightarrow |4 - \bar{u}_1 \cdot u_2|^2 < 4 \cdot |u_1 - u_2|^2 \Leftrightarrow$

$$(4 - \bar{u}_1 \cdot u_2)(4 - u_1 \cdot \bar{u}_2) < 4 \cdot (u_1 - u_2)(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \Leftrightarrow$$

$$16 - 4u_1 \cdot \bar{u}_2 - 4\bar{u}_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 \cdot u_2 < 4u_1\bar{u}_1 + 4u_2\bar{u}_2 - 4u_1\bar{u}_2 - 4\bar{u}_1 u_2 \Leftrightarrow$$

$$16 + u_1 \cdot \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 \cdot u_2 - 4u_1\bar{u}_1 - 4u_2\bar{u}_2 < 0 \Leftrightarrow$$

$(4 - u_1\bar{u}_1)(u_2\bar{u}_2 - 4) < 0 \Leftrightarrow \left(4 - |u_1|^2\right)\left(|u_2|^2 - 4\right) < 0$ που ισχύει λόγω των σχέσεων (2).