ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
$1^{Ο}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 1, 2)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξτε ότι: για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 10

2. Πως ορίζουμε το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z;

Μονάδες 6

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**

(1) $|z|^2 = z\overline{z}$

(2) $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

(3) $z-\overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$

(4) Οι εικόνες των z και $\overline{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

(5) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

Μονάδες 5

(z, $\overline{z}$ είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί)

(6) Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\varepsilon\varphi x\ \sigma\upsilon\nu x$ είναι ίσες.

Μονάδες 1

(7) Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1, είναι γνησίως μονότονη

Μονάδες 1

(8) Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε είναι κατ' ανάγκη συνεχής στα σημεία α και β.

Μονάδες 1

(9) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta)$, τότε παίρνει μία μέγιστη τιμή σε αυτό.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει $|iz+2i+1|=|z+3|$.

1. Να αποδείξετε ότι γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ευθεία με εξίσωση $x+y+2=0$.

Μονάδες 7

2. Να βρεθεί:

α) Ο μιγαδικός z με το ελάχιστο μέτρο.

β) Η ελάχιστη τιμή του $|z-2-i|$.

γ) Ο αριθμός z ο οποίος είναι πραγματικός.

Μονάδες 12

3. Αν για το μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w-1-2i|=1$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|w-z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha\beta\neq 0$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)\neq 0$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$, $w=\beta^2-if(\beta)$ για τους οποίους ισχύει: $|\overline{w}+z|=|w-\overline{z}|$.

1. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $w\cdot z$ είναι φανταστικός αριθμός.

Μονάδες 8

2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(\alpha)x^3-f(\beta)x+5}{f(\beta)x^2+f(\alpha)x-3}$.

Μονάδες 9

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει με τον άξονα $x'x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+e^x-1$

1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 4

2. Να λύσετε την εξίσωση $e^x=1-x$

Μονάδες 3

3. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(f(x)-x+1\right)>1$

Μονάδες 4

4. Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x)+e^{g(x)}=2x+1$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g είναι γνησίως αύξουσα

β) η C_g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 8

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(gog)(x)-g(1-x^{2012})=0$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,1).

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ