ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1, 2)

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 194 (θεώρημα ενδιαμέσων τιμών).

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 97

3. **1)** Σ, **2)** Σ, **3)** Λ, **4)** Σ, **5)** Σ, **6)** Λ, **7)** Λ, **8)** Λ, **9)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

1. Είναι $1=-i^2$. Επομένως έχουμε:

$$\left|iz+2i-i^2\right|=|z+3| \Leftrightarrow |i(z+2-i)|=|z+3| \Leftrightarrow |i||(z+2-i)|=|z+3|$$

$$\Leftrightarrow |z-(-2+i)|=|z-(-3+0i)|.$$ **(1)**

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετη, έστω (ε), του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Α(-2,1) και Β(-3,0).

Αν $z=x+yi$, από την **(1)** έχουμε:

$$|x+yi-(-2+i)|=|x+yi-(-3+0i)| \Leftrightarrow$$
$$|(x+2)+(y-1)i|=|(x+3)+yi| \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2+(y-1)^2=(x+3)^2+y^2 \Leftrightarrow$$
$$x+y+2=0$$

2. α) Από τους παραπάνω μιγαδικούς $z=x+yi$, ελάχιστο μέτρο έχει αυτός που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή Ο(0,0). Επομένως η εικόνα του είναι το σημείο τομής της (ε) με την κάθετη από το Ο προς την (ε), που έχει εξίσωση $y=x$. Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} y=x \\ y=-x-2 \end{cases}$, βρίσκουμε ότι το σημείο τομής των δυο ευθειών είναι το (-1,-1) και άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z=-1-i$.

β) Είναι $|z-2-i|=|z-(2+i)|$. Επομένως η ελάχιστη τιμή του $|z-2-i|$ είναι η απόσταση του σημείου Μ(2,1) από την ευθεία (ε), δηλαδή είναι η $d(M,\varepsilon)=\dfrac{|2+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

γ) Είναι εκείνος ο μιγαδικός z με $\operatorname{Im}(z)=0$. Επομένως ο μιγαδικός αυτός είναι η τετμημένη του σημείου τομής της (ε) με τον άξονα $x'x$. Αν θέσουμε στην εξίσωση $x+y+2=0$, $y=0$, βρίσκουμε $x=-2$, άρα ο μιγαδικός που ζητάμε είναι ο $z=-2$.

3. Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(1,2) και ακτίνα ρ=1. Άρα η ελάχιστη τιμή του $|w-z|$ είναι ίση με $d(K,\varepsilon)-\rho=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-1$.

ΘΕΜΑ Γ

1. Έχουμε

$$|\overline{w}+z|=|w-\overline{z}|\Leftrightarrow|\overline{w}+z|^2=|w-\overline{z}|^2\Leftrightarrow(\overline{w}+z)(\overline{\overline{w}+z})=(w-\overline{z})(\overline{w-\overline{z}})\Leftrightarrow$$

$(\overline{w}+z)(w+\overline{z})=(w-\overline{z})(\overline{w}-z)$ και μετά τις πράξεις προκύπτει $wz=-\overline{wz}$, άρα ο αριθμός wz είναι φανταστικός.

2. $wz=(\alpha^2+if(\alpha))(\beta^2-if(\beta))=(\alpha^2\beta^2+f(\alpha)f(\beta))+(\beta^2f(\alpha)-\alpha^2f(\beta))i$

Και επειδή ο αριθμός wz είναι φανταστικός πρέπει $\operatorname{Re}(wz)=0$ οπότε προκύπτει $f(\alpha)f(\beta)=-\alpha^2\beta^2<0$.

Επομένως $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(\alpha)x^3-f(\beta)x+5}{f(\beta)x^2+f(\alpha)x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(\alpha)x^3}{f(\beta)x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}x=+\infty$

3. Για την f στο διάστημα [α,β] ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [α,β], από την υπόθεση.
- $f(\alpha)f(\beta)=-\alpha^2\beta^2<0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α, β), δηλαδή η γραφική παράσταση της f θα έχει με τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

ΘΕΜΑ Δ

1. Για τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $e^{x_1} < e^{x_2}$ και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $x_1 + e^{x_1} < x_2 + e^{x_2}$. Επομένως $x_1 + e^{x_1} - 1 < x_2 + e^{x_2} - 1$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και "1–1", οπότε αντιστρέφεται.

2. Είναι $e^x = 1 - x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Προφανής λύση η $x = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "1–1", η λύση αυτή είναι μοναδική.

3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f^{-1}\left(f(x) - x + 1\right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(f^{-1}\left(f(x) - x + 1\right)\right) > f(1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - x + 1 > f(1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - x + 1 > e \Leftrightarrow$$

$$x + e^x - 1 - x + 1 > e \Leftrightarrow$$

$$e^x > e \Leftrightarrow$$

$$x > 1$$

4. **α)** Έστω ότι η g δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A_g$ με $x_1 < x_2$, ώστε:

$$\begin{cases} g(x_1) \geq g(x_2) \\ e^{g(x_1)} \geq e^{g(x_2)} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} g(x_1) + e^{g(x_1)} \geq g(x_2) + e^{g(x_2)} \Leftrightarrow 2x_1 + 1 \geq 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$$

άτοπο, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Ισχύει $g(0)+e^{g(0)}=1$, προφανής και μοναδική λύση η $g(0)=0$ (προκύπτει από το **(2.)**).

5. $(gog)(x)-g(1-x^{2012})=0 \Leftrightarrow (gog)(x)=g(1-x^{2012})$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και "1–1" προκύπτει $g(x)=1-x^{2012} \Leftrightarrow g(x)-1+x^{2012}=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)+x^{2012}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Για την h στο διάστημα [0,1] ισχύουν:

- Η h συνεχής στο [0,1] ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. (Η g είναι συνεχής από την υπόθεση).
- $h(0)=g(0)-1=-1<0$. (g(0)=0 από το 4. β)).

$h(1)=g(1)+1-1=g(1)>g(0)=0$ (αφού g γν. αύξουσα).

Άρα $h(0)h(1)<0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).