

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**2<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 1, 2, 3)**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

2. Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ):

(1) Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .

(2) Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

(3) Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε, δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f + g$  στο  $x_0$ .

(4) Αν υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε υπάρχει και το όριο της  $g$  στο  $x_0$ .

(5) Αν  $f(x) = x^x$ ,  $x > 0$ , τότε  $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = x + yi$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$  και  $w = \frac{z - 2i}{z + 1}$ ,  $z \neq -1$ . (I)

1. Αν  $A$ ,  $B$  και  $M$  είναι οι εικόνες των μιγαδικών  $-1$ ,  $2i$  και  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι  $|w| = \frac{(MB)}{(MA)}$ .

**Μονάδες 8**

2. Αν  $w = 1 + 2i$ , να βρείτε το μιγαδικό  $z$ .

**Μονάδες 7**

3. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z = x + yi$  στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στον κύκλο με κέντρο  $A(-1, 0)$  και ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , να βρείτε την καμπύλη στην οποία ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού  $w$  της σχέσης (I).

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} & , -1 \leq x < 0 \\ \alpha^2 \ln(x+e) + 2\alpha + (\beta^2 + \frac{1}{2})e^x & , x \geq 0 \end{cases}$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

**Μονάδες 8**

2. Αν  $\alpha = -1$  και  $\beta = 0$ ,

α) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1}$ .

**Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον θετικό ημιάξονα  $Ox$  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**Μονάδες 6**

γ) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( xf(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$ .

1. α) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - 1}{x}$

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2x) - 1}{x} = 4f'(0)$

Μονάδες 4

2. Αν επιπλέον για την  $f$  ισχύει,  $f^2(x) - 4f(x) = x^2 - 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

3. Αν  $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$ , οι οποίες διέρχονται από το

σημείο  $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$ .

Μονάδες 6

β) Έστω σημείο  $M$  της  $C_f$  με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του  $M$  απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων  $O$  με ταχύτητα  $2\text{cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $OAM$ .

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ