ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2^o ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1, 2, 3)

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 217.

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 141.

3. **1)** Λ, **2)** Σ,

3) Λ, (π.χ ενώ τα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχουν, το όριο του αθροίσματος υπάρχει.)

4) Σ, (Αν θέσουμε $h(x)=f(x)+g(x)$,τότε $g(x)=h(x)-f(x)$ και αφού τα όρια των h και f υπάρχουν, θα υπάρχει και της διαφοράς τους).

5) Λ, **το σωστό είναι**

$$f'(x)=\left(x^x\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)\ ,\quad x>0$$

ΘΕΜΑ Β

1. Επειδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους, έχουμε:

$$(MB)=|z-2i|,\quad (MA)=|z+1| \text{ και } |w|=\left|\frac{z-2i}{z+1}\right|=\frac{|z-2i|}{|z+1|}=\frac{(MB)}{(MA)}$$

2. $w=1+2i\Leftrightarrow\frac{z-2i}{z+1}=1+2i\Leftrightarrow z-2i=z+1+2iz+2i\Leftrightarrow z=\frac{1+4i}{-2i}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\frac{(1+4i)i}{-2i\cdot i}\Leftrightarrow z=\frac{i-4}{2}\Leftrightarrow\boxed{z=-2+\frac{1}{2}i}$$

3. Επειδή οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο Α(-1,0) και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{5}}{2}$, ισχύει $|z+1|=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Από τη σχέση $w=\frac{z-2i}{z+1}$ προκύπτει:

$$w=\frac{z-2i}{z+1}\Leftrightarrow wz+w=z-2i\Leftrightarrow wz-z=-w-2i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z(w-1)=-(w+2i)\Leftrightarrow z=\frac{w+2i}{1-w}\quad (w\neq 1)*$$

Άρα

$$|z+1|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{w+2i}{1-w}+1\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{w+2i+1-w}{1-w}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{1+2i}{1-w}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5}}{|1-w|}=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow|1-w|=2\Leftrightarrow|w-1|=2$$

Άρα οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλο κέντρου Κ (1,0) και ακτίνα R= 2.

* Είναι $w\neq 1$, διότι αν θέσουμε στη δοθείσα σχέση $w=\frac{z-2i}{z+1}$, όπου $w=1$, μετά τις πράξεις προκύπτει 1=-2i (άτοπον).

ΘΕΜΑ Γ

1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

- $$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{(1+\sqrt{x+1})}=\frac{-1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha^2\ln(x+e)+2\alpha+(\beta^2+\frac{1}{2})e^x\right) = \alpha^2+2\alpha+\beta^2+\frac{1}{2}$

Πρέπει:

$$\frac{-1}{2} = \alpha^2+2\alpha+\beta^2+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+\beta^2+1=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2+\beta^2=0$$

άρα $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

2. Για $\alpha=-1$ και $\beta=0$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & , \quad -1\le x<0\\ \ln(x+e)-2+\dfrac{1}{2}e^x & , \quad x\ge 0\end{cases}.$$

α) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1-\sqrt{x+1}+x}{x(x+1)} =$

$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)-\sqrt{x+1}}{x(x+1)} \overset{*}{=} \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1+\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(\sqrt{x+1})^2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = +\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=1$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{x+1}=0$ και $\sqrt{x+1}>0$

* Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$**,** έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$. Έχουμε $f(0)=-\frac{1}{2}<0$ και $f(2)=\ln(2+e)+\frac{1}{2}e^2-2>0$, αφού $e>2\Rightarrow e^2>2^2\Rightarrow\frac{1}{2}e^2>2\Rightarrow\frac{1}{2}e^2-2>0$ και $\ln(2+e)>0$. Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,\ 2)$.

γ) Έχουμε $\left|xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|xf(x)|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|xf(x)|$.

Επομένως $-|xf(x)|\le xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\le|xf(x)|$.

Όμως

$\lim\limits_{x\to0}|xf(x)|=\lim\limits_{x\to0}\left(-|xf(x)|\right)=0$. Άρα από το κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to0}\left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

1. α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}\cdot x=f'(0)\cdot0=0$**,**

διότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=\lim\limits_{u\to0}\frac{f(u)-f(0)}{u}=f'(0)$ **(**θέτουμε όπου $u=x^2$, οπότε όταν $x\to0$ και $u\to0$).

β) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f^2(2x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\big(f(2x)-1\big)\big(f(2x)+1\big)}{x}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\big(f(2x)-f(0)\big)\big(f(2x)+1\big)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\big(f(2x)-f(0)\big)\big(f(2x)+1\big)}{2x}=$$

$$=2f'(0)\left(f(0)+1\right)=2f'(0)\left(1+1\right)=4f'(0)$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(k)-f(0)}{k}=f'(0)$ **, (**θέτουμε $2x=k$ **,** οπότε όταν $x\to 0$ και $k\to 0$).

2. Ισχύει:

$$f^2(x)-4f(x)=x^2-3\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4=x^2-3+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4=x^2+1\Leftrightarrow\left(f(x)-2\right)^2=x^2+1 \quad \textbf{(I)}$$

Επειδή $x^2+1>0$, έχουμε και $f(x)-2\neq 0$ και επομένως η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2$ διατηρεί το πρόσημό της, αφού είναι συνεχής και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή επιπλέον έχουμε και $f(0)=1$, είναι $g(0)=f(0)-2=1-2=-1<0$ και επομένως $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $g(x)=-\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)-2=-\sqrt{x^2+1}$.

Άρα $f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

3. α) Έστω $\left(x_0,f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση εφαπτομένης θα είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\left(2-\sqrt{{x_0}^2+1}\right)=\frac{-x_0}{\sqrt{{x_0}^2+1}}(x-x_0) \quad \textbf{(II)}$$ και επειδή

διέρχεται από το σημείο $B\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ θα επαληθεύεται από αυτό. Δηλαδή θα ισχύει

$$\frac{3}{2}-\left(2-\sqrt{{x_0}^2+1}\right)=\frac{-x_0}{\sqrt{{x_0}^2+1}}(0-x_0)\Leftrightarrow\frac{-1}{2}+\sqrt{{x_0}^2+1}=\frac{{x_0}^2}{\sqrt{{x_0}^2+1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{2}\sqrt{{x_0}^2+1}+{x_0}^2+1={x_0}^2\Leftrightarrow\sqrt{{x_0}^2+1}=2\Leftrightarrow{x_0}^2+1=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$$

- Για $x_0=\sqrt{3}$ προκύπτει από τη **(II)** η εξίσωση $y=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}$
- Για $x_0=-\sqrt{3}$ προκύπτει από τη **(II)** η εξίσωση $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}$

β) Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της C_f με $x > 0$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ ισούται με $E_{(OAM)} = \frac{1}{2}(OA)\cdot d(M, y'y) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x$ και επειδή η τετμημένη μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου έχουμε $E(t) = \frac{1}{2}x(t)$. Άρα $E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)$ και επειδή $x'(t) = 2cm/sec$, προκύπτει ότι το εμβαδόν μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(t) = 1cm^2/sec$.