ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
3Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 1, 2, 3)

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Μονάδες 5

(ii) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$.

Μονάδες 5

2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** (Σ), αν είναι σωστή, ή με **Λάθος** (Λ), αν είναι λανθασμένη:

α) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $z_1^2+z_2^2=0$, τότε ισχύει πάντοτε $z_1=z_2=0$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, τότε πάντοτε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)=0$, τότε το $f(x_0)$ είναι ακρότατο της f.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και κυρτή, τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\ell nx|,\ x>0$.

1. Να κάνετε τη γραφική παράσταση (C_f) της f και να βρείτε την παράγωγό της.

Μονάδες 6

2. Αν $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha, \alpha>0$, αποδείξτε ότι $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Μονάδες 5

3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων (ε_A), (ε_B) της C_f στα $A(e^{\alpha}, \alpha)$ και $B(e^{-\alpha}, \alpha)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\alpha>0$.

Μονάδες 6

4. Έστω Μ και Ν τα σημεία τομής της ευθείας (ε_B) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ, γίνεται μέγιστο, η ευθεία (ε_A) διέρχεται από το Ο. (Ο η αρχή των αξόνων).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[1, 2]$ με $f(1)=-1$ και $f(2)=1$. Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\kappa+\lambda i,\quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=|z|$.

1. Να αποδείξετε ότι:

α) Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-1,1]$.

Μονάδες 4

β) $\mathrm{Im}(z)=1$.

Μονάδες 5

γ) Υπάρχει ακριβώς μια τιμή του $\mathrm{Re}(z)$ τέτοια, ώστε ο αριθμός $w=z^2-\dfrac{1}{z}$ να είναι πραγματικός.

Μονάδες 7

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(\kappa) = f\left(|z|^2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της φ.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι αν $\mathrm{Re}(z) \in [0,1]$ τότε $-1 \leq \varphi(\kappa) \leq 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xf'(x)=x+f(x)$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 1$.

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = x\ln x + x$, $x>0$

Μονάδες 4

β) $f(0) = 0$

Μονάδες 3

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Μονάδες 2

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της και ότι δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία στη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 6

4. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο ισχύει $f(x)+\kappa \geq 1+\kappa x$.

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ