ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1, 2, 3)

ΘΕΜΑ Α

1. (i) Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», σελίδα 229

(ii) Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», σελίδα 234

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», σελίδα 222.

3. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΛΑΘΟΣ

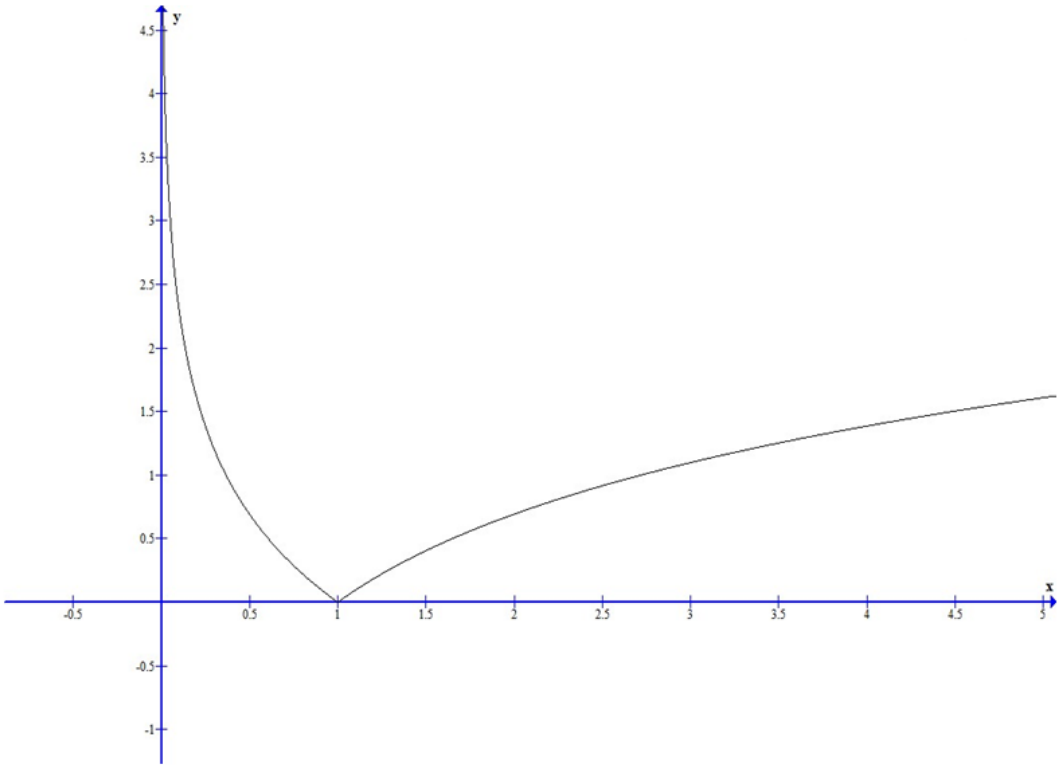
γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από το τμήμα της γραφικής παράστασης της $\ln x$ με $x \geq 1$ και το συμμετρικό ως προς τον άξονα $x'x$ τμήμα της γραφικής παράστασης της $\ln x$, $0 < x < 1$ που βρίσκεται κάτω από αυτόν. (Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.136). Η C_f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η συνάρτηση γράφεται $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ -\ln x, & 0<x<1 \end{cases}$

και έχει παράγωγο $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>1 \\ \dfrac{-1}{x}, & 0<x<1 \end{cases}$

- Για $x=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-0}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\ln x-0}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{x}}{1}=-1$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

2. Λύνουμε τα συστήματα: $\begin{cases} y=\ln x \\ y=\alpha \end{cases}, \quad x \geq 1$ και $\begin{cases} y=-\ln x \\ y=\alpha \end{cases}, \quad 0<x<1$

- $\begin{cases} y = \ln x \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \ln x = \alpha \Leftrightarrow x = e^{\alpha}$ Άρα $A(e^{\alpha}, \alpha)$

- $\begin{cases} y = -\ln x \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x^{-1} \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \ln x^{-1} = \alpha \Leftrightarrow e^{\alpha} = x^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^{\alpha}}$

Άρα $B\left(\frac{1}{e^{\alpha}}, \alpha\right) = \left(e^{-\alpha}, \alpha\right)$. Επομένως $x_1 \cdot x_2 = e^{\alpha} \frac{1}{e^{\alpha}} = 1$

3.

- Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Α είναι:

ε_A : $y - f(e^{\alpha}) = f'(e^{\alpha})(x - e^{\alpha}) \Leftrightarrow y - \alpha = \frac{1}{e^{\alpha}}(x - e^{\alpha}) \Leftrightarrow y = e^{-\alpha}x - 1 + \alpha$

- Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Β είναι:

$\varepsilon_B : y - f\left(e^{-\alpha}\right) = f'\left(e^{-\alpha}\right)\left(x - e^{-\alpha}\right) \Leftrightarrow$ (επειδή $e^{-\alpha} < 1$)

$y - \alpha = \frac{-1}{e^{-\alpha}}\left(x - e^{-\alpha}\right) \Leftrightarrow y = -e^{\alpha}x + 1 + \alpha$

Και επειδή $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = e^{-\alpha}\left(-e^{\alpha}\right) = -1$ είναι $\varepsilon_A \perp \varepsilon_B$.

4. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ε_B με τους άξονες. Έχουμε για $x=0$, $y=1+\alpha$ και για $y = 0$, $x = \frac{1+\alpha}{e^{\alpha}}$. Άρα η ε_B τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $M\left(\frac{1+\alpha}{e^{\alpha}}, 0\right)$ και τον άξονα $y'y$ στο $N(0, 1+\alpha)$, $\alpha > 0$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ είναι:

$$E = \frac{1}{2}(OM)(ON) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha}{e^{\alpha}} \cdot (1+\alpha) = \frac{(1+\alpha)^2}{2e^{\alpha}}, \ \alpha > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=\frac{(1+x)^2}{2e^x}$, $x>0$.

Είναι $g'(x)=\frac{2(1+x)2e^x-2e^x(1+x)^2}{4e^{2x}} \Leftrightarrow g'(x)=\frac{2(1+x)-(1+x)^2}{2e^x}=\frac{1-x^2}{2e^x}$.

x	0		1		$+\infty$
g'		+	0	-	
g		↗	Max	↘	

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ μεγιστοποιείται για $\alpha=1$.

Για $\alpha=1$ η ε_A γίνεται: $y=e^{-1}x$, άρα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Γ

1. α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[1,2]$ με $f(1)<f(2)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$. Επειδή η συνάρτηση f είναι και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1,2]$, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(1),f(2)]=[-1,1]$.

β) Ισχύει: $|z-2i|=|z| \Leftrightarrow |z-(0+2i)|=|z-(0+0i)|$. Επομένως οι εικόνες του μιγαδικού $z=\kappa+\lambda i,\ \ \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα Α(0,2) και Ο(0,0), δηλαδή στην ευθεία $y=1$, που σημαίνει ότι $\mathrm{Im}(z)=1$.

γ) Επειδή $\mathrm{Im}(z)=1$, έχουμε $z=\kappa+i$, άρα $z\neq 0$, οπότε ορίζεται ο w για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$. Επομένως

$$w=z^2-\frac{1}{z}=(\kappa+i)^2-\frac{1}{\kappa+i}=(\kappa+i)^2-\frac{\kappa-i}{(\kappa+i)(\kappa-i)}=$$

$$=\kappa^2+2\kappa i-1-\frac{\kappa-i}{\kappa^2+1}=\left(\kappa^2-1-\frac{\kappa}{\kappa^2+1}\right)+\left(2\kappa+\frac{1}{\kappa^2+1}\right)i$$

$$w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2\kappa+\frac{1}{\kappa^2+1}=0\Leftrightarrow 2\kappa^3+2\kappa+1=0 \ \textbf{(1)}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση **(1)** έχει μια ακριβώς ρίζα ως προς κ στο $\mathbb{R}$, αφού

$\kappa=\mathrm{Re}(z)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\kappa)=2\kappa^3+2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Στο διάστημα $[-2,0]$ για τη g ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[-2,0]$ ως πολυωνυμική και
- $g(0)\cdot g(-2)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(\kappa)=0$ θα έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-2,0)$. Επειδή $g'(\kappa)=6\kappa^2+2>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού είναι συνεχής και $g'(\kappa)>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $g(\kappa)=0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$. Άρα υπάρχει ακριβώς μια τιμή του $\mathrm{Re}(z)$ τέτοια, ώστε ο αριθμός $w=z^2-\frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός.

2. α) Είναι $|z|^2=\kappa^2+1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^2+1$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi=f\circ h$ είναι:

$$A_1=\{x\in\mathbb{R}:\ h(x)\in[1,2]\}=\{x\in\mathbb{R}:1\le h(x)\le 2\}=\{x\in\mathbb{R}:1\le x^2+1\le 2\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}:0\le x^2\le 1\}=\{x\in\mathbb{R}:0\le|x|\le 1\}=\{x\in\mathbb{R}:-1\le x\le 1\}=[-1,1].$$

β) Η συνάρτησης $\varphi=f\circ h$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ ως σύνθεση συνεχών.

Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $x_1<x_2$, τότε έχουμε:

$$x_1^2<x_2^2\Rightarrow x_1^2+1<x_2^2+1\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow}$$

$$f\left(h(x_1)\right) < f\left(h(x_2)\right) \Rightarrow (f \circ h)(x_1) < (f \circ h)(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση $\varphi = f \circ h$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$

Επομένως ισχύει:

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow (f \circ h)(0) \le (f \circ h)(x) \le (f \circ h)(1) \Rightarrow$$

$$f\left(h(0)\right) \le f\left(h(x)\right) \le f\left(h(1)\right) \Rightarrow f(1) \le f\left(h(x)\right) \le f(2) \Rightarrow$$

$-1 \le \varphi(x) \le 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$

Άρα $-1 \le \phi(\kappa) \le 1$, για κάθε $\kappa \in [0,1]$.

ΘΕΜΑ Δ

1. α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $xf'(x) = x + f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = x\ln x + cx$$

Είναι $f(1) = 1$, οπότε $f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f(x) = x\ln x + x, \;\; x > 0$

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έχουμε

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x\ln x + x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x + 1}{\frac{1}{x}}$. Όμως $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x + 1) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, επομένως εφαρμόζουμε κανόνα De L' Hopital και έχουμε:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x\ln x + x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x + 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x + 1)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Άρα $f(0) = 0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln x+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(\ln x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+1)=-\infty$.

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2. Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι $f'(x)=\ln x+2$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x+2=0\Leftrightarrow \ln x=-2\Leftrightarrow x=e^{-2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x+2>0\Leftrightarrow \ln x>-2\Leftrightarrow x>e^{-2}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e^2}$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι

x	0		$\frac{1}{e^2}$		$+\infty$
f'		-	0	+	
f	τ.μ.	$\searrow$	Ολ. ελάχιστο	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0\,,\frac{1}{e^2}\right]$, αφού είναι συνεχής σε αυτό και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e^2}\,,+\infty\right)$, αφού είναι συνεχής σε αυτό και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$,παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=0$ (άκρο διαστήματος) το $f(0)=0$ και ολικό ελάχιστο στο $\frac{1}{e^2}$ το $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-e^{-2}$.

3. Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στο $[0\,,+\infty)$.

Έστω ότι υπάρχουν τρία σημεία συνευθειακά τα $A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, $B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$, $\Gamma\left(x_3, f\left(x_3\right)\right)$ της C_f. Τότε $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} = \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2}$ **(I)**

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[x_1, x_2\right]$ και $\left[x_2, x_3\right]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(x_1\ ,\ x_2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_1\right) = \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(x_2\ ,\ x_3\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_2\right) = \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2}$.

Η **(I)** ισοδύναμα γράφεται $f'\left(\xi_1\right) = f'\left(\xi_2\right)$ που είναι άτοπο, γιατί η $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και "$1-1$".

4. $f(x)+\kappa \geq 1+\kappa x \Leftrightarrow f(x)+\kappa-1-\kappa x \geq 0$ **(II)**. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-\kappa x-1+\kappa\ ,\ x \in [0,+\infty)$, οπότε η **(II)** γράφεται $h(x) \geq h(1)$. Δηλαδή η h παρουσιάζει ακρότατο στο 1 που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $h'(1)=0$. Είναι για κάθε $x \in (0,+\infty)$

$h'(x) = f'(x) - \kappa = \ln x + 2 - \kappa$.

$h'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$.