ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», σελίδα 251

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», σελίδα 151.

3.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

1. α. Είναι $z_1^2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Άρα $1 + z_1 + z_1^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

β. Προφανώς είναι $z_1 \neq 1$. Επομένως

$$1 + z_1 + z_1^2 = 0 \Leftrightarrow \ z_1 - 1 \ \ 1 + z_1 + z_1^2 \ = \ z_1 - 1 \ \cdot 0 \Leftrightarrow z_1^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = 1.$$

γ. Έχουμε

$$z_2^{2\nu+1} = -z_1^{\nu+2} \Leftrightarrow (1+z_1)^{2\nu+1} = -z_1^{\nu+2}$$
$$\Leftrightarrow (-z_1^2)^{2\nu+1} = -z_1^{\nu+2}$$
$$\Leftrightarrow z_1^{4\nu+2} = z_1^{\nu+2}$$
$$\Leftrightarrow z_1^{3\nu} = 1$$
$$\Leftrightarrow (z_1^3)^{\nu} = 1$$

που ισχύει.

Ομοίως

$$z_2^{2\nu} = z_1^{\nu} \Leftrightarrow (1+z_1)^{2\nu} = z_1^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow (-z_1^2)^{2\nu} = z_1^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow z_1^{4\nu} = z_1^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow z_1^{3\nu} = 1$$
$$\Leftrightarrow (z_1^3)^{\nu} = 1$$

που ισχύει

2. Λόγω της δεύτερης σχέσης του ερωτήματος (1 (γ))

έχουμε: $z_2^{36} = z_2^{2\cdot 18} = z_1^{18} = (z_1^3)^6 = 1^6 = 1 + 0i$. Άρα α =1 και β = 0.

Λόγω της πρώτης σχέσης του ερωτήματος (1 (γ)) έχουμε:

$$z_2^{19} = z_2^{2\cdot 9+1} = -z_1^{9+2} = -z_1^2 \cdot z_1^9 = -z_1^2 \cdot (z_1^3)^3 =$$
$$= -z_1^2 \cdot 1 = -z_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Άρα $\gamma = \dfrac{1}{2}$ και $\delta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

1. Επειδή οι συναρτήσεις f και $g(x)=\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμες, έχουμε ότι και η συνάρτηση $\left(gof\right)(x)=e^{-f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη. Επομένως και η συνάρτηση $f(x)-e^{-f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επομένως , από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$\left(f(x)-e^{-f(x)}\right)'=\left(x-1\right)'$$

$$f'(x)+f'(x)\cdot e^{-f(x)}=1$$

$$f'(x)\left(1+e^{-f(x)}\right)=1$$

Όμως $1+e^{-f(x)}>0$, για κάθε $x\in R$. Άρα $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$

2.

- Επειδή $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}>0$ για κάθε $x\in R$, έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.
- Επειδή $f(0)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, έχουμε

$f(x)<f(0)=0$ για κάθε $x<0$ και $f(x)>f(0)=0$ για κάθε $x>0$.

Άρα

$$f(x)<0,\ \gamma\iota\alpha\ x<0$$
$$f(0)=0$$
$$f(x)>0,\ \gamma\iota\alpha\ x>0$$

3. Επειδή $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$, η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^{-f(x)}}\right)'=\frac{-\left(-f'(x)\cdot e^{-f(x)}\right)}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}=\frac{f'(x)\cdot e^{-f(x)}}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}.$$

Επειδή $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}>0$, έχουμε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f είναι κυρτή στο R. (Βλέπε και σχολικό βιβλίο, σελίδα 278, άσκηση 3, Β΄Ομάδας)

4. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[0,x]$, $(x>0)$ αφού είναι συνεχής στο $[0,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,x)$. Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$$

Όμως $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$ που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R. Επομένως, αφού $0<\xi<x$, έχουμε

$$f'(0)<f'(\xi)<f'(x)$$
$$\frac{1}{1+e^{-f(0)}}<\frac{f(x)}{x}<f'(x)$$
$$\frac{1}{1+e^{0}}<\frac{f(x)}{x}<f'(x)$$
$$\frac{1}{2}<\frac{f(x)}{x}<f'(x)$$

και επειδή x>0, παίρνουμε : $\frac{1}{2}x<f(x)<xf'(x)$ (1)

Όμως $f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}}<1$ και x>0. Επομένως $xf'(x)<x$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε τελικά $\frac{1}{2}x<f(x)<xf'(x)<x$, για κάθε $x>0$.

5. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι : $\frac{x}{2}<f(x)<x,\ \ x>0$ και εφ' όσον $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-f(x)\right)=-\infty$ και άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=0$

Έχουμε : $f(x)-e^{-f(x)}=x-1\Leftrightarrow f(x)-(x-1)=e^{-f(x)}$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=0$$

Άρα η ευθεία $y=x-1$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

1. Η συνάρτηση $\dfrac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, το $1\in(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)}$.

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)} \Leftrightarrow xe^{f(x)}f'(x)+xf'(x)=x+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)+f'(x)=1+\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=\left(x+\ln x\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c.$$

Για $x=1$ έχουμε $e^{f(1)}+f(1)=1+\ln 1+c \Leftrightarrow e^0+0=1+0+c \Leftrightarrow c=0.$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$.

2. Για κάθε $x\in R$ είναι $\varphi'(x)=e^x+1>0$, οπότε η συνεχής συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «$1-1$».

3. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x \Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=e^{\ln x}+\ln x$ (1).

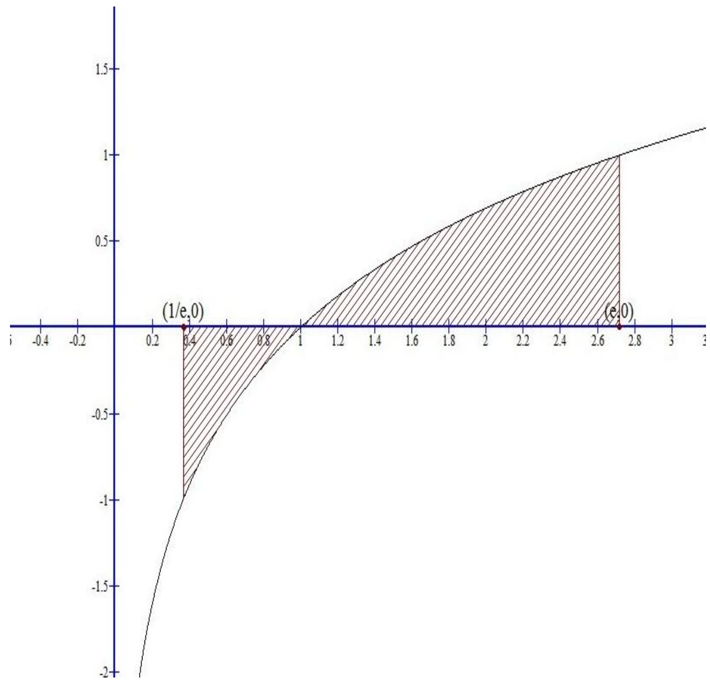
Από (1) ισοδύναμα έχουμε $\varphi(f(x))=\varphi(\ln x)\overset{1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

4. α) Για $\frac{1}{e} \le x \le 1$ είναι $\ln x < 0$ και για $1 \le x \le e$ $\ln x > 0$. Άρα

$$E = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |f(x)|\, dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{e} f(x)\, dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\, dx + \int_{1}^{e} \ln x\, dx =$$

$$= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} x' \ln x\, dx + \int_{1}^{e} x' \ln x\, dx = \left[-x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} 1\, dx + \left[x\ln x\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} 1\, dx =$$

$$= \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} + \left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + e\ln e - \left[x\right]_{1}^{e} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 = \left(2 - \frac{2}{e}\right)\tau\mu$$



β) Για να ορίζεται το κλάσμα $\frac{x}{\ln x}$, πρέπει $x > 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\ln x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1$ **(2)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(t) = \frac{1}{\ln t}$ η οποία είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $D_\kappa = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Για να ορίζεται η συνάρτηση $\int_e^x \frac{1}{\ln t}\, dt$ πρέπει τα άκρα του ολοκληρώματος να ανήκουν στο ίδιο διάστημα του D_κ και αφού $e \in (1,+\infty)$ έπεται ότι και $x \in (1,+\infty)$ **(3)**

Από **(2)** και **(3)** προκύπτει ότι $D_G = (1,+\infty)$.

Η G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων του πηλίκου $\frac{x}{\ln x}$ και της $\int_e^x \frac{1}{\ln t}\,dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\kappa(t)=\frac{1}{\ln t}$.

Παραγωγίζοντας τη G προκύπτει $G'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}=\frac{\ln x-1-\ln x}{\ln^2 x}=\frac{-1}{\ln^2 x}<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και αφού η G είναι συνεχής θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Επομένως :

$$e<e^2 \overset{G\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Rightarrow} G(e)>G(e^2)\Rightarrow \frac{e}{\ln e}>\frac{e^2}{\ln e^2}-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}\,dt\Rightarrow \frac{e}{1}>\frac{e^2}{2}-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}\,dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}\,dt>\frac{e^2}{2}-e.$$