ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
5^{Ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αποδείξτε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Μονάδες 10

2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση της f στο Δ;

Μονάδες 5

3. *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη:*

1) Αν $z=\alpha+\beta i,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, τότε $\frac{1}{z}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}i$.

2) Η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$ με άγνωστο τον $z\in\mathbb{C}$ και $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ έχει μόνο μια λύση.

3) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β]. Αν $f(\alpha)f(\beta)>0$, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β).

4) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει $x_0\in\Delta$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

5) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν:

$|z_2|=1$, $|z_1-z_2|=|z_1|$ και $z_2=z_1(1-2\lambda i)$, όπου λ πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός.

1. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}\ ) = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 6

2. Να αποδείξετε ότι $|z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ.

Μονάδες 8

3. Αν Α και Β είναι οι εικόνες των z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Α και ισοσκελές. (Ο η αρχή των αξόνων).

Μονάδες 6

4. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει $iw = \frac{z_2 + i}{z_2}$, κινείται στο μιγαδικό επίπεδο σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f\left(x+2\right)-5}{x-1} = 6$$

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f\left(3\right)=5$ και β) $f'\left(3\right)=6$

Μονάδες 6

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+2 - f(x)}{\eta\mu(x-3)}$.

Μονάδες 7

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x)\text{-}3x\text{-}7\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

Μονάδες 5

4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$g'(x) \leq f'(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$f(0) = 1$ και $\displaystyle\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du = x \int_0^x f(t)\, dt + \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2}$, $x, u, t \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt \geq x \cdot e^{-x^2}$, για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 4

4. Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt - x}{x^3}$.

Μονάδες 4

5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, k)$, $k > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\displaystyle\int_0^k e^{-t^2} dt = k \cdot e^{-\xi^2}$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ