ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδες 262-263.

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 303.

3. **1)** Λάθος, **2)** Λάθος, **3)** Λάθος, **4)** Σωστό, **5)** Λάθος .

ΘΕΜΑ Β

1. Από τη δοθείσα σχέση $|z_1 - z_2| = |z_1|$ ισοδυνάμως έχουμε:

$$|z_1 - z_2| = |z_1| \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = \frac{1}{2}$$

2. $z_1 \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1(1-2\lambda i)} = z_1 \cdot \overline{z_1}(1+2\lambda i) = |z_1|^2\,(1+2\lambda i) =$

$|z_1|^2 + 2\lambda|z_1|^2\, i$

Και επειδή από το ερώτημα (1) ισχύει $\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}\ ) = \frac{1}{2}$, θα είναι $|z_1|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>1ο τρόπος:</u>

$$z_2 = z_1(1-2\lambda i) \Leftrightarrow z_2 = z_1 - 2z_1 \cdot \lambda i \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2z_1 \cdot \lambda i$$

άρα $|z_1 - z_2| = |2z_1\lambda i| \Leftrightarrow |z_1| = 2|z_1||\lambda i| \Leftrightarrow 1 = 2|\lambda| \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{2}$ άρα $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

2º τρόπος:

$z_2 = z_1(1-2\lambda i)$ άρα

$$|z_2| = |z_1(1-2\lambda i)| \Leftrightarrow |z_2| = |z_1||1-2\lambda i| \Leftrightarrow 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+4\lambda^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{2}\sqrt{1+4\lambda^2} \Leftrightarrow 4 = 2(1+4\lambda^2) \Leftrightarrow 2 = 1+4\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

3. Ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και επειδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους θα είναι $(AB) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ομοίως $(OA) = |z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $(OB) = |z_2| = 1$. Επομένως το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με κορυφή το A αφού (AB)=(AO).

Εξάλλου ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα αφού

$(OA)^2 + (AB)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 = (OB)^2$ άρα το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο στο A.

4. $iw = \frac{z_2 + i}{z_2} \Leftrightarrow iwz_2 = z_2 + i \Leftrightarrow z_2(iw-1) = i \Leftrightarrow iw - 1 = \frac{i}{z_2}$ (είναι $z_2 \neq 0$ αφού $|z_2|=1$).

Άρα

$$|iw-1| = \left|\frac{i}{z_2}\right| \Leftrightarrow |iw-1| = \frac{|i|}{|z_2|} \Leftrightarrow |iw-1| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|i(w-\frac{1}{i})\right| = 1 \Leftrightarrow |i|\left|w-\frac{i}{i^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |w+i| = 1$$

Επομένως η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στον κύκλο με κέντρο το σημείο K(0, -1) και ακτίνα R=1.

ΘΕΜΑ Γ

1. α) Για $x \neq 1$, θέτουμε $h(x) = \frac{f(x+2)-5}{x-1}$. Τότε $\lim_{x\to 1} h(x) = 6$ και

$f(x+2)=(x-1)h(x)+5$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x+2)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)+5\right]=5$.

Όμως οι συναρτήσεις f και $g(x)=x+2$ είναι συνεχείς. Επομένως και η $f(x+2)$ είναι συνεχής. Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x+2)\ =f(1+2)=f(3)=5$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=6$

Αν θέσουμε όπου $x=u+2$, τότε, όταν $x\to 3$ το $u\to 1$ και έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u+2)-f(3)}{u-1}=\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u+2)-5}{u-1}=6$. Άρα $f'(3)=6$.

2. $$\lim_{x\to 3}\frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x+2-f(x)}{(x-3)}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x+2-f(x)-5+5}{(x-3)}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)}}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x-3-\left(f(x)-5\right)}{(x-3)}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{(x-3)-\left(f(x)-f(3)\right)}{(x-3)}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)}}=\frac{1-f'(3)}{1}=1-6=-5$$

Διότι:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$ και $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)}=1$, (θέτουμε $x-3=u$, $(u\to 0)$ οπότε

$\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$,

<u>Σχόλιο</u>: Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα De L'Hospital γιατί δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,3)\cup(3,\beta)$.

3. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Για την h στο διάστημα [0,3] ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [0,3].

- $\begin{cases} h(0)= -7<0 \\ h(3)=3f(3)-9-7συν3=15-9-7συν3= 6-7συν3>0 \\ (\text{αφού } \frac{\pi}{2} < 3 < \pi) \end{cases}$

  και στο δεύτερο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι αρνητικός αριθμός.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει μία τουλάχιστον λύση στο (0,3), δηλαδή η γραφική παράσταση της h θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

4. Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$ έχει δυο τουλάχιστον λύσεις μεγαλύτερες του 1, τις x_1 και x_2 με $1 < x_1 < x_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - x^6,\ x \in [x_1, x_2]$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $h'(x) = g'(x) - 6x^5$ και ισχύει $h(x_1) = h(x_2) = 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$. Έχουμε

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi)-6\xi^5 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi)=6\xi^5$. Όμως $g'(\xi) \le f'(3) \Leftrightarrow g'(\xi) \le 6$. Επομένως $6\xi^5 \le 6 \Leftrightarrow \xi^5 \le 1 \Leftrightarrow \xi \le 1$ που είναι άτοπον αφού $1 < x_1 < \xi < x_2$.

ΘΕΜΑ Δ

1. Η συνάρτηση $\int_0^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f.

Ομοίως η συνάρτηση $\int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\int_0^u f(t)dt$. Από τη δοθείσα ισότητα προκύπτει:

$$\left(\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt \right) du \right)' = \left(x \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} \right)'$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + xf(x) + \frac{1}{2} f'(x)$$

$$f'(x) + 2xf(x)=0$$

$$e^{x^2}f'(x)+2xe^{x^2}f(x)=0$$

$$\left(e^{x^2}f(x)\right)'=0$$

Επομένως $e^{x^2}f(x)=c$ και για $x=0$ προκύπτει $c=1$. Άρα $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$. Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

max
f(0)=1

Άρα :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$
- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (0,1].

3. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, για $0\le t\le x$ έχουμε:

$$f(t)\ge f(x)\Rightarrow f(t)-f(x)\ge 0\Rightarrow \int_0^x (f(t)-f(x))dt\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(x)dt\ge 0\Rightarrow \int_0^x f(t)dt\ge \int_0^x f(x)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt\ge f(x)\int_0^x 1dt\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2}dt\ge f(x)\big[t\big]_0^x\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2}dt\ge xe^{-x^2},\ x\ge 0$$

4. Αν στο ολοκλήρωμα $\int_0^x f(x-t)dt$ θέσουμε x-t = u , τότε έχουμε $du=-dt$ και τα άκρα ολοκλήρωσης γίνονται x και 0 αντιστοίχως. Επομένως

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt$$

Με εφαρμογή του κανόνα de L' Hospital (μορφή $\frac{0}{0}$), έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt - x\right)'}{\left(x^3\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x^2}}{3} = -\frac{1}{3}$$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$, $x \geq 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f(t)=e^{-t^2}$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ για τη g στο διάστημα [0,k], k>0.

Επομένως θα υπάρχει $\xi \in (0,k)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(k)-g(0)}{k} \Rightarrow e^{-\xi^2} = \frac{\int_0^k e^{-t^2}dt}{k} \Rightarrow \int_0^k e^{-t^2}dt = k\cdot e^{-\xi^2}$$