

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
6^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

2. Τι ονομάζουμε σύνθεση $g \circ f$ δύο συναρτήσεων f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της $g \circ f$;

Μονάδες 3

3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη:

α) Αν ισχύει $|z - 4| = |z + 4|$ τότε τα σημεία $M(z)$ ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

Μονάδες 3

β) Αν $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = cf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

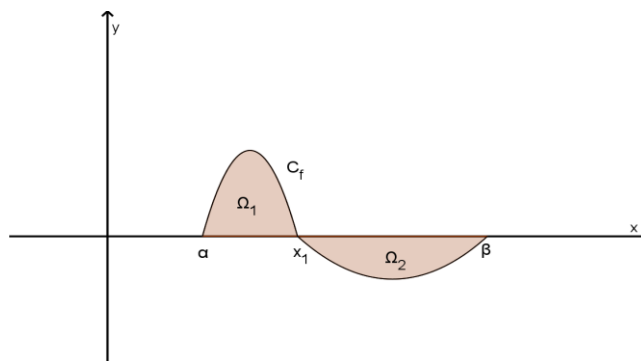
Μονάδες 3

γ) Αν η γραφική παράσταση της f είναι κυρτή στο $(\alpha, x_0]$ και κοίλη στο $[x_0, \beta)$ τότε παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 .

Μονάδες 3

δ) Αν για τη συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε

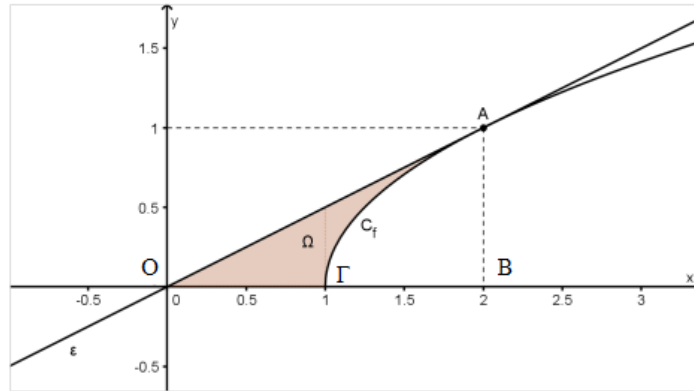
$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2).$$



Μονάδες 3

ε) Αν στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι: $\int_1^2 f(x) dx = \frac{2}{3}$, τότε το εμβαδό του χωρίου

Ω που περικλείεται από την ευθεία ε , τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$ ισούται με $1/3$ τ.μ.



Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f , με $f(x) = e^{2x} + (x-1)^5$.

A. Να βρεθεί η μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

B. Να αποδείξετε, ότι η γραφική παράσταση C_f , της f , τέμνει τον άξονα $x'x$, σ' ένα ακριβώς σημείο.

Μονάδες 5

Γ. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $g^3(x) + 2g(x) = 5f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. Η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Μονάδες 5

ii. Η γραφική παράσταση C_g , της g , τέμνει τον άξονα $x'x$ στο ίδιο σημείο με την C_f .

Μονάδες 5

Δ. Να λυθεί η ανίσωση $g(f(x)) > g(e^2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f^2(x) + 3f(x) - x = 0$, $x \in [-2, +\infty)$. Αν για κάθε $x \in [-2, +\infty)$ ισχύει $f(x) \geq -1$, τότε:

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[-2, +\infty)$.

Μονάδες 5

B. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4, f(4))$.

Μονάδες 5

E. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-2, +\infty)$, ισχύει $5f(x) \leq x + 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = f(\alpha) - 2i\alpha$ και $w = f(\beta) - 2i\beta$ με $\alpha, \beta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $|2w - iz| = |2w + iz|$.

A. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{w}{z}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 7

B. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 8

Γ. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha} \int_{\alpha}^x \frac{f(4x + \alpha - 4t)}{(x - t)(4x + \alpha - 4t)} dt = -1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει $f'(\xi) = 1$.

Μονάδες 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ