# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
# 6º ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)

## ΘΕΜΑ Α

**1.** Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 260.

**2.** Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 143.

**3.**

α) Λάθος

Το σύνολο των σημείων $M(z)$ ισαπέχουν από τα $A(4,0), B(-4,0)$ επομένως θα βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΑΒ, άρα είναι η ευθεία με εξίσωση $x=0$.

β) Σωστό

Αν $f'(x)g(x)=f(x)g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=cf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $f,g$ είναι (ως παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$) συνεχείς και

$$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=0$$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)'=0$. Άρα υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ ώστε $\dfrac{g(x)}{f(x)}=c \Leftrightarrow g(x)=cf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ)Λάθος

Πρέπει επιπλέον να ορίζεται και η εφαπτομένη στο $x_0$.

δ)Σωστό

Αφού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{\beta} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{x_1} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{\beta} f(x)\,dx$ άρα $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.

ε) Σωστό

το εμβαδόν του τριγώνου $(OAB) = \frac{(AB)(OB)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$, οπότε $E(\Omega) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ τ.μ

**ΘΕΜΑ Β**

**Α.** Το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το $A_f = \mathbb{R}$, στο οποίο είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x) = 2e^{2x} + 5(x-1)^4 > 0$, άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x} + (x-1)^5) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x} + (x-1)^5) = +\infty$. Άρα $f(A) = (-\infty, +\infty)$.

**Β.** Έχουμε ότι $0 \in f(A) = (-\infty, +\infty)$ και αφού η $f$ είναι συνεχής, η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$. Επειδή, όμως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $f(x) = 0$, έχει μία το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$. Άρα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή η $C_f$ τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο τον άξονα $x'x$.

**Γ.**

i. Παραγωγίζοντας κατά μέλη την $g^3(x) + 2g(x) = 5f(x), (*)$, έχουμε:

$$3g^2(x)g'(x) + 2g'(x) = 5f'(x) \Leftrightarrow (3g^2(x) + 2)g'(x) = 5f'(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{5f'(x)}{3g^2(x) + 2} > 0$$, διότι $f'(x) > 0$ και $3g^2(x) + 2 > 0$.

Άρα η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = 0$. **(1)**

Για $x = x_0$, από την (*) έχουμε: $g^3(x_0) + 2g(x_0) = 5f(x_0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (g^2(x_0) + 2)g(x_0) = 0$

και επειδή $g^2(x_0) + 2 \neq 0$, θα είναι $g(x_0) = 0$, δηλαδή το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα της

$g(x)=0$. Όμως, η $g$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Επομένως, η $C_g$ τέμνει τον $x'x$ στο ίδιο σημείο με την $C_f$.

**Δ.** $g(f(x))>g(e^2) \overset{g:\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x)>e^2 \overset{f(1)=e^2}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1) \overset{f:\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x>1.$

## ΘΕΜΑ Γ

Α’ τρόπος

**Α.** Έστω $x_0\in[-2,+\infty)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Έχουμε $\begin{cases} f^2(x)+3f(x)-x=0 \\ f^2(x_0)+3f(x_0)-x_0=0 \end{cases}$ και αφαιρώντας βρίσκουμε:

$$f^2(x)-f^2(x_0)+3f(x)-3f(x_0)-x+x_0=0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)-f(x_0))(f(x)+f(x_0)+3)=x-x_0 \Rightarrow$$

$$|f(x)-f(x_0)||f(x)+f(x_0)+3|=|x-x_0| \Rightarrow$$

$$\overset{f(x)+f(x_0)+3\geq 1}{\Rightarrow} |f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq|x-x_0| \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}(-|x-x_0|)=\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, από το κριτήριο παρεμβολής η **(1)** μας δίνει $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

**Β.** Έστω $x_0\in[-2,+\infty)$. Από το Α) ερώτημα έχουμε:

$$(f(x)-f(x_0))(f(x)+f(x_0)+3)=x-x_0 \overset{x\neq x_0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{f(x)+f(x_0)+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)+f(x_0)+3}=\frac{1}{2f(x_0)+3}$$

Άρα $f'(x)=\dfrac{1}{2f(x)+3}$.

**Γ.** Ισχύει $f(x)\geq -1 \Rightarrow 2f(x)+3\geq 1>0$, οπότε $f'(x)>0,\ \text{για κάθε}\ x\in[-2,+\infty)$.

Όμως $f''(x)=\dfrac{-2f'(x)}{\left(2f(x)+3\right)^2}<0$ που σημαίνει ότι η $f$ στρέφει τα κοίλα κάτω για κάθε $x\in[-2,+\infty)$.

Επίσης $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[-2,+\infty)$, άρα δεν έχει σημεία καμπής.

**Δ.** Στη σχέση $f^2(x)+3f(x)-x=0,$ θέτουμε όπου $x=4$ και έχουμε:
$f^2(4)+3f(4)-4=0\Rightarrow f(4)=-4$ ή $f(4)=1$.

Επειδή όμως $f(x)\geq -1$, τότε θα έχουμε $f(4)=1$ και $f'(4)=\dfrac{1}{5}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $A(4,f(4))$ είναι: $y-f(4)=f'(4)(x-4)\Rightarrow y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{5}$

**Ε.** Αφού η $f$ είναι κοίλη στο $[-2,+\infty)$, η εφαπτομένη της θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής, οπότε θα ισχύει:
$f(x)\leq \dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{5}\Rightarrow 5f(x)\leq x+1,\ x\in[-2,\infty)$.

<u>Β’ τρόπος</u>

$$f^2(x)+3f(x)-x=0\Leftrightarrow f^2(x)+2\frac{3}{2}f(x)+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-x=0\Leftrightarrow \left(f(x)+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+x\geq 0,\quad \textbf{(1)}$$

γιατί $x\geq -2\geq -\dfrac{9}{4}$

η **(1)** γίνεται $\left(f(x)+\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\dfrac{9}{4}+x}\right)^2\Leftrightarrow$

$$\left(\left(f(x)+\frac{3}{2}\right)-\left(\sqrt{\frac{9}{4}+x}\right)\right)\left(\underbrace{\left(f(x)+\frac{3}{2}\right)+\left(\sqrt{\frac{9}{4}+x}\right)}_{+\ \ f(x)\geq -1>-\frac{3}{2}}\right)=0$$ οπότε

$$\left(f(x)+\frac{3}{2}\right)-\left(\sqrt{\frac{9}{4}+x}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{9+4x}}{2}$$

**Α.** $f\left(x\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{9+4x}}{2}$, με $x\geq -2$ συνεχής σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Β. $f\left(x\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{9+4x}}{2}$ παραγωγίσιμη σαν άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(9+4x\right)'}{2\sqrt{9+4x}}=\frac{1}{\sqrt{9+4x}}>0$$

Γ. $f''\left(x\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{9+4x}}\right)'=\left(\left(9+4x\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}4\left(9+4x\right)^{-\frac{3}{2}}=-2\left(9+4x\right)^{-\frac{3}{2}}<0$ που σημαίνει ότι η $f$ στρέφει τα κοίλα κάτω για κάθε $x\in\left[-2,+\infty\right)$.

Επίσης $f''\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\left[-2,+\infty\right)$, άρα δεν έχει σημεία καμπής.

**Δ.** $f\left(4\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{9+16}}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$, $f'(4)=\frac{1}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $A(4,f(4))$ είναι: $y-f(4)=f'(4)(x-4)\Rightarrow y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$

Ε. Αφού η $f$ είναι κοίλη στο $\left[-2,+\infty\right)$, η εφαπτομένη της θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής, οπότε θα ισχύει:
$f(x)\leq\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\Rightarrow 5f(x)\leq x+1,\ x\in\left[-2,\infty\right)$.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Α.** Τη σχέση $\left|2w-iz\right|=\left|2w+iz\right|$ υψώνουμε στο τετράγωνο

$$|2w-iz|^2=|2w+iz|^2 \Leftrightarrow (2w-iz)\left(\overline{2w-iz}\right)=(2w+iz)\left(\overline{2w+iz}\right)$$
$$\Leftrightarrow (2w-iz)\left(2\overline{w}+i\overline{z}\right)=(2w+iz)\left(2\overline{w}-i\overline{z}\right)$$
$$\Leftrightarrow 4w\overline{w}-2iz\overline{w}+2iw\overline{z}+z\overline{z}=4w\overline{w}+2iz\overline{w}-2iw\overline{z}+z\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow 4iw\overline{z}=4iz\overline{w} \Leftrightarrow \frac{w}{z}=\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{w}{z}\in\mathbb{R}$$

$(*)$ Ισχύει $z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ επίσης $z\neq 0$ επειδή $\alpha>0$.

**B.** Από τη σχέση $\frac{w}{z}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \frac{w}{z}=\frac{\overline{w}}{\overline{z}}\Leftrightarrow w\overline{z}=z\overline{w}\Leftrightarrow$

$$\left(f(\beta)-2i\beta\right)\left(f(\alpha)+2i\alpha\right)=\left(f(\alpha)-2i\alpha\right)\left(f(\beta)+2i\beta\right)$$
$$\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)-2i\beta f(\alpha)+2i\alpha f(\beta)+4\alpha\beta=f(\alpha)f(\beta)+2i\beta f(\alpha)-2i\alpha f(\beta)+4\alpha\beta$$
$$\Leftrightarrow 4i\alpha f(\beta)=4i\beta f(\alpha)\Leftrightarrow \alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}, \ \textbf{(1)}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα τυχαίο σημείο της $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Για να διέρχεται η $(\varepsilon)$ από την αρχή των αξόνων πρέπει το σημείο $O(0,0)\in(\varepsilon)$, άρα θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει $0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$, **(2).**

Στη θέση του $x_0\to x$ και η **(2)** γίνεται

$$xf'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle.

- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων άρα και συνεχής
- $g(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}\overset{(1)}{=}g(\beta)=\frac{f(\beta)}{\beta}$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle

Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta): g'(x_0)=0$

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-(x)'f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$g'(x_0)=0 \Rightarrow \dfrac{x_0 f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^{\ 2}}=0 \Rightarrow x_0 f'(x_0)-f(x_0)=0$ άρα δείξαμε τη **(2)**

Γ. Θέτουμε $4x+\alpha-4t=u \Rightarrow (4x+\alpha-4t)'\,dt=du \Rightarrow -4dt=du$

Υπολογίζουμε τα καινούργια όρια ολοκλήρωσης

| | | |
|---|---|---|
| t | x | α |
| u | α | $4x-3\alpha$ |

Το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to\alpha}\int_{\alpha}^{x}\frac{f(4x+\alpha-4t)}{(\alpha-x)(4x+\alpha-4t)}dt=-1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{1}{(\alpha-x)}\left(-\frac{1}{4}\right)\int_{4x-3\alpha}^{\alpha}\frac{f(u)}{u}du=-1$$

(ο όρος $\alpha-x$ είναι σταθερός ανεξάρτητος της μεταβλητής $u$)

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{-\int_{4x-3\alpha}^{\alpha}\frac{f(u)}{u}du}{4(\alpha-x)}=-1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{\int_{\alpha}^{4x-3\alpha}\frac{f(u)}{u}du}{4(\alpha-x)}=-1 \overset{\frac{0}{0}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to\alpha}\frac{\left(\int_{\alpha}^{4x-3\alpha}\frac{f(u)}{u}du\right)'}{4(\alpha-x)'}=-1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{\dfrac{f(4x-3\alpha)(4x-3\alpha)'}{(4x-3\alpha)}}{-4}=-1 \Leftrightarrow -\lim_{x\to\alpha}\frac{4f(4x-3\alpha)}{4(4x-3\alpha)}=-1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{f(4x-3\alpha)}{(4x-3\alpha)}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}=1 \Rightarrow f(\alpha)-\alpha=f(\beta)-\beta=0\text{, } \mathbf{(3).}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle.

- Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων άρα και συνεχής
- $h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=0$, $h(\beta)=f(\beta)-\beta=0 \Rightarrow h(\alpha)=h(\beta)$

άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta): h'(\xi)=0$.

Όμως $h'(x)=f'(x)-1$ έτσι έχουμε

$h'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)-1=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=1$