Ρητοί αριθμοί

1.1 Γενικά

Οι αριθμοί 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5,... ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί**
Το σύνολο

$$\mathbf{N} = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \dots\}$$

ονομάζεται **σύνολο των φυσικών αριθμών**
Η θέση των φυσικών αριθμών πάνω σε μια ευθεία , φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

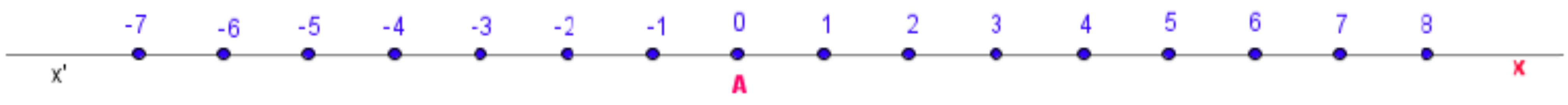
Δηλαδή, οι φυσικοί αριθμοί τοποθετούνται στην ημιευθεία **Ax**

Αν τώρα τοποθετήσουμε στην ημιευθεία Ax΄ τους αρνητικούς των φυσικών αριθμών , δηλαδή τους αριθμούς $-1 , -2 , -3 , -4 , -5$,... κ.λ.π , τότε δημιουργούμε ένα νέο σύνολο που το συμβολίζουμε με το γράμμα **Z** και το ονομάζουμε **σύνολο των ακέραιων αριθμών**.

Επομένως,

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \dots\}$$

Η θέση των ακέραιων αριθμών πάνω σε μια ευθεία , φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος

Ας θεωρήσουμε τώρα όλα τα κλάσματα της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ είναι ακέραιος και ν φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός
Οι αριθμοί που έχουν την παραπάνω μορφή ονομάζονται **ρητοί αριθμοί** , και το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με το γράμμα **Q**
Οι αριθμοί $\frac{3}{5} , -\frac{4}{23} , \frac{5}{1} , \frac{13}{2}$ είναι ρητοί αριθμοί.

Παρατηρήστε ότι κάθε ρητός αριθμός είναι και ακέραιος , αφού για παράδειγμα $\frac{5}{1} = 5$ και $\frac{-3}{1} = -3$.

1.2 Ρητοί αριθμοί

Αν κάνουμε την διαίρεση $\frac{1}{3}$ βρίσκουμε σαν αποτέλεσμα τον δεκαδικό αριθμό 0.33333333…
Παρατηρούμε ότι το ψηφίο 3 **«επαναλαμβάνεται»** συνεχώς. στο τέλος του αριθμού.
Το ψηφίο 3 λέγεται **περίοδος** του δεκαδικού αριθμού 0.33333333…και ο αριθμός 0.33333333…λέγεται **απειροψήφιος δεκαδικός περιοδικός αριθμός με περίοδο το μονοψήφιο τμήμα 3**.
Για λόγους συντομίας ο αριθμός 0.33333333…θα συμβολίζεται με $0.\overline{3}$

Άρα

$$\boxed{0.\overline{3} = 0.33333333\dots}$$

Παραδείγματα

- $0.\overline{4} = 0.44444444\dots$ Περίοδος το μονοψήφιο τμήμα 4
- $1.\overline{14} = 1.1414141414\dots$ Περίοδος το διψήφιο τμήμα 14
- $4.\overline{236} = 4.236236236236236\dots$ Περίοδος το τριψήφιο τμήμα 236

Παρατηρήστε ότι ο ρητός $\frac{1}{5} = 0.2 = 0.200000000\dots = 0.2\overline{0}$

Συμπέρασμα
Κάθε ρητός αριθμός , είναι ένας **δεκαδικός απειροψήφιος περιοδικός αριθμός.**

Σημείωση

$$1.532532532532532\dots = 1.\overbrace{532}^{\alpha'\ \text{τμήμα περιόδου}}\underbrace{532}_{\beta'\ \text{τμήμα περιόδου}}\overbrace{532}^{\gamma'\ \text{τμήμα περιόδου}}\underbrace{532}_{\delta'\ \text{τμήμα περιόδου}}532532\dots$$

1.3. Μετατροπή απειροψήφιου περιοδικού δεκαδικού αριθμού σε κλασματική μορφή

Για την μετατροπή απειροψήφιου περιοδικού δεκαδικού αριθμού σε κλασματική μορφή ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Θέτουμε τον δοσμένο αριθμό x.
2. Εντοπίζουμε την περίοδό του.
3. Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό x με κατάλληλες δυνάμεις του 10, ούτως , ώστε να «βρεθούμε» μπροστά από το α΄ μέρος και το β΄ μέρος της περιόδου του.
4. Αφαιρούμε τις δύο προκύπτουσες σχέσεις και λύνουμε ως προς x.

1. Να γράψετε τον αριθμό 2,1111111….σε κλασματική μορφή.

ΛΥΣΗ
Έστω $\alpha = 2{,}1111111\dots$ (1)
Η περίοδός του είναι το μονοψήφιο τμήμα 1
Το α΄ μέρος της περιόδου είναι το α = 2,1111111… και το β΄ μέρος της περιόδου του είναι το α = 2,1111111…
Για να βρεθεί η υποδιαστολή μπροστά από το β΄ μέρος της περιόδου του πολλαπλασιάζουμε με το 10 , και έχουμε:
$10\alpha = 21{,}111111\dots$ (2)
Αφαιρούμε την (1) από την (2) και παίρνουμε:
$10\alpha - \alpha = 21{,}11111\dots - 2{,}111111\dots = 19$, δηλαδή $9\alpha = 19 \Rightarrow \alpha = \frac{19}{9}$

2. Να γράψετε τον αριθμό 0,1213131313…σε κλασματική μορφή.

ΛΥΣΗ
Έστω $\alpha = 0{,}1213131313\dots$ (1)
Η περίοδός του είναι το διψήφιο τμήμα 13
Το α΄ μέρος της περιόδου είναι το α = 0,1213131313…και το β΄ μέρος της περιόδου του είναι το α = 0,1213131313…
Για να βρεθεί η υποδιαστολή μπροστά από το α΄ μέρος της περιόδου του πολλαπλασιάζουμε με το 100 , και έχουμε:
$100\alpha = 12{,}13131313\dots$ (2)
Για να βρεθεί η υποδιαστολή μπροστά από το β΄ μέρος της περιόδου του πολλαπλασιάζουμε με το 10000 , και έχουμε:
$10000\alpha = 1213{,}131313\dots$ (3)
Αφαιρούμε την (2) από την (3) και παίρνουμε:
$10000\alpha - 100\alpha = 1213{,}131313\dots - 12{,}13131313\dots = 1201$, δηλαδή
$9900\alpha = 1201 \Rightarrow \alpha = \frac{1201}{9900}$

3. Να γράψετε τον αριθμό 11,045213213213213…σε κλασματική μορφή.

ΛΥΣΗ
Έστω $\alpha = 11{,}045213213213213\dots$ (1)
Η περίοδός του είναι το τριψήφιο τμήμα 213
Το α΄ μέρος της περιόδου είναι το α = 11,045213213213213…και το β΄ μέρος της περιόδου του είναι το α = 11,045213213213…
Για να βρεθεί η υποδιαστολή μπροστά από το α΄ μέρος της περιόδου του πολλαπλασιάζουμε με το 1000 , και έχουμε:
$1000\alpha = 11045{,}213213213213\dots$ (2)
Για να βρεθεί η υποδιαστολή μπροστά από το β΄ μέρος της περιόδου του πολλαπλασιάζουμε με το 1000000 , και έχουμε:
$1000000\alpha = 11045213{,}213213213\dots$ (3)
Αφαιρούμε την (2) από την (3) και παίρνουμε:
$1000000\alpha - 1000\alpha = 11045213{,}213213213\dots - 11045{,}213213213213\dots = 11034168$, δηλαδή
$999000\alpha = 11034168 \Rightarrow \alpha = \frac{11034168}{999000}$

Κλείσιμο