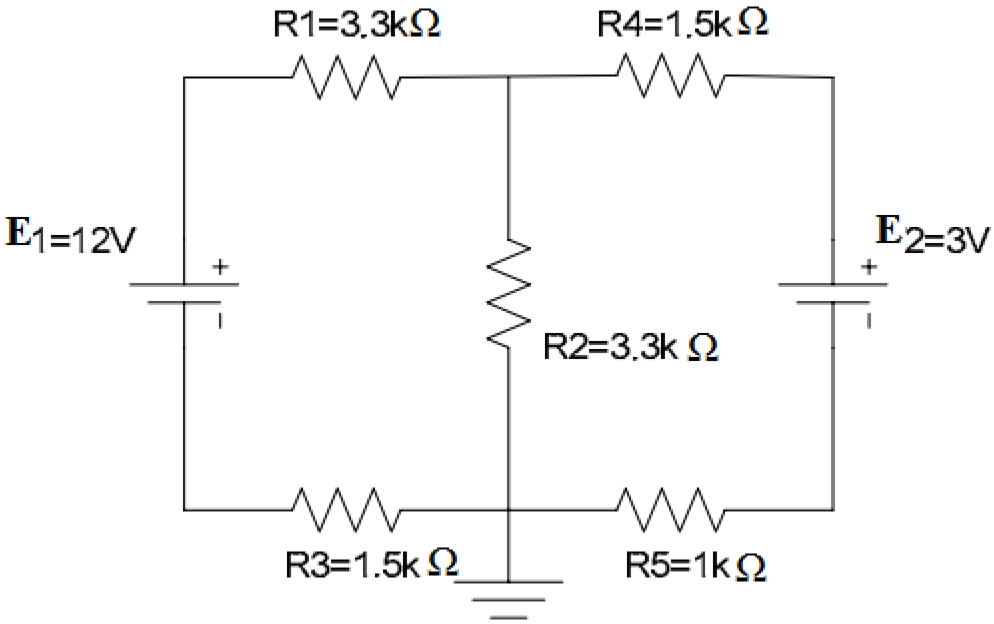
Μέθοδος (ελαχίστων) βρόχων

1ο Παράδειγμα Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3 των κλάδων

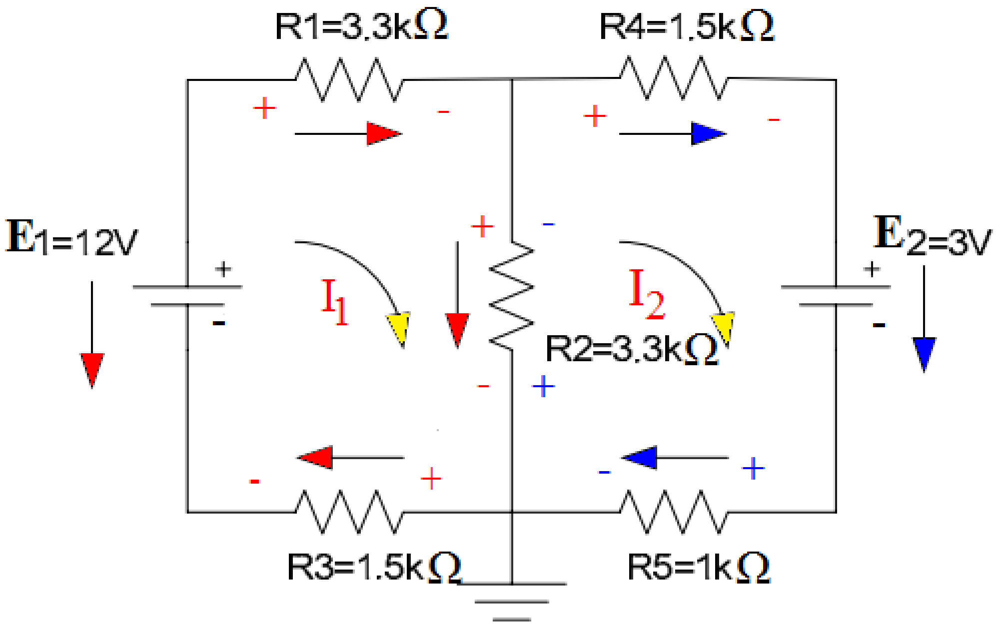


Λύση

α. Σχεδιάζονται οι φορές των ρευμάτων I_1 και I_2 στους δυο βρόγχους.

β. Σύμφωνα με τις φορές των ρευμάτων I_1 και I_2 βρίσκονται οι πολικότητες των πτώσεων τάσεων στις επιμέρους αντιστάσεις R1,R2, R3, R4 και R5.

γ. Από τις πολικότητες των πτώσεων τάσεων σχεδιάζονται τα βελάκια δυναμικού τα οποία βοηθούν να γραφτούν οι εξισώσεις του β' κανόνα του Kirchhoff κάθε βρόγχου.



δ. Σύμφωνα με τον β’ κανόνα του Kirchhoff, το άθροισμα των τάσεων κάθε βρόγχου ισούται με μηδέν:

$$\left.\begin{aligned} -E_1 + R_1\cdot I_1 + R_3\cdot I_1 + R_2\cdot(I_1 - I_2) = 0 \\ E_2 + R_4\cdot I_2 + R_5\cdot I_2 + R_2\cdot(I_2 - I_1) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -E_1 + (R_1 + R_3)\cdot I_1 + R_2\cdot I_1 - R_2\cdot I_2 = 0 \\ E_2 + (R_4 + R_5)\cdot I_2 + R_2\cdot I_2 - R_2\cdot I_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

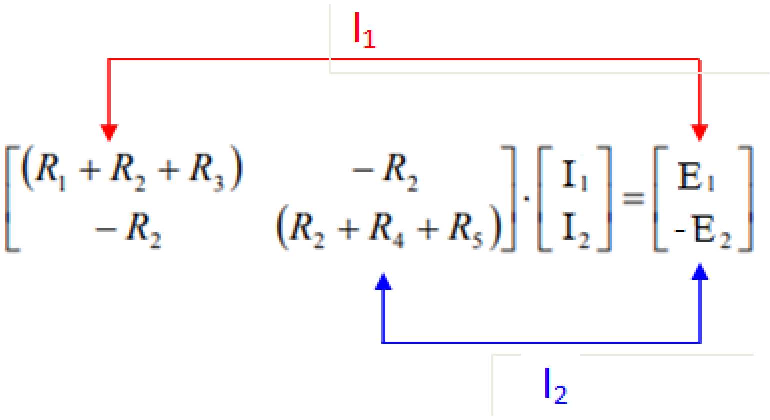
$$\left.\begin{aligned} -E_1 + (R_1 + R_2 + R_3)\cdot I_1 - R_2\cdot I_2 = 0 \\ E_2 - R_2\cdot I_1 + (R_2 + R_4 + R_5)\cdot I_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_3)\cdot I_1 - R_2\cdot I_2 = E_1 \\ -R_2\cdot I_1 + (R_2 + R_4 + R_5)\cdot I_2 = -E_2 \end{aligned}\right\}$$

Μέθοδοι επίλυσης του συστήματος των δυο εξισώσεων:

i) Πίνακας γινομένων

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_3) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_4 + R_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix}$$



$$I_1 = \frac{\begin{bmatrix} E_1 & -R_2 \\ -E_2 & (R_2 + R_4 + R_5) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_3) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_4 + R_5) \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 12 & -3.3k \\ -3 & 5.8k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8.1k & -3.3k \\ -3.3k & 5.8k \end{bmatrix}} =$$

$$\frac{[12 \cdot 5800 - (-3300 \cdot (-3)]}{[8100 \cdot 5800 - (3300 \cdot 3300)]} = \frac{[69600 - 9900]}{[46980000 - 10890000]} = \frac{59700}{36090000} = 0{,}00165A$$

ή

$$I_1 = 1{,}65mA$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_3) & \mathrm{E}_1 \\ -R_2 & \text{-}\mathrm{E}_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_3) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2+R_4+R_5) \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 8.1k & 12 \\ -3.3k & -3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8.1k & -3.3k \\ -3.3k & 5.8k \end{bmatrix}} =$$

$$\frac{[-24300 + 39600]}{[8100 \cdot 5800 - (3300 \cdot 3300)]} = \frac{15300}{36090000} = 4{,}2 \cdot 10^{-4}A$$

ή

$$\mathrm{I}_2 = 0{,}42\mathrm{mA}$$

ii) Αντικατάστασης:

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{E}_1 + (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3) \cdot \mathrm{I}_1 - \mathrm{R}_2 \cdot \mathrm{I}_2 = 0 \\ \mathrm{E}_2 - \mathrm{R}_2 \cdot \mathrm{I}_1 + (\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_4 + \mathrm{R}_5) \cdot \mathrm{I}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -12 + (3{,}3k + 3{,}3\mathrm{k} + 1{,}5\mathrm{k}) \cdot \mathrm{I}_1 - 3{,}3\mathrm{k} \cdot \mathrm{I}_2 = 0 \\ 3 - 3{,}3\mathrm{k} \cdot \mathrm{I}_1 + (3{,}3\mathrm{k} + 1{,}5\mathrm{k} + 1\mathrm{k}) \cdot \mathrm{I}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -12 + 8100 \cdot \mathrm{I}_1 - 3300 \cdot \mathrm{I}_2 = 0 \\ 3 - 3300 \cdot \mathrm{I}_1 + 5800 \cdot \mathrm{I}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}_2 = \frac{-12 + 8100 \cdot \mathrm{I}_1}{3300} \\ 3 - 3300 \cdot \mathrm{I}_1 + 5800 \cdot \mathrm{I}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= -0{,}0036 + 2{,}45 \cdot I_1 \\ 3 - 3300 \cdot I_1 + 5800 \cdot (-0{,}0036 + 2{,}45 \cdot I_1) &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= -0{,}0036 + 2{,}45 \cdot I_1 \\ 3 - 3300 \cdot I_1 - 21{,}1 + 14236{,}1 \cdot I_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= -0{,}0036 + 2{,}45 \cdot I_1 \\ 10936{,}1 \cdot I_1 &= 18{,}1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= -0{,}0036 + 2{,}45 \cdot I_1 \\ I_1 &= \frac{18{,}1}{10936{,}1} = 0{,}00165 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= -0{,}0036 + 2{,}45 \cdot (0{,}00165) \approx 4{,}2 \cdot 10^{-4} \\ I_1 &= \frac{18{,}1}{10936{,}1} = 0{,}00165 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

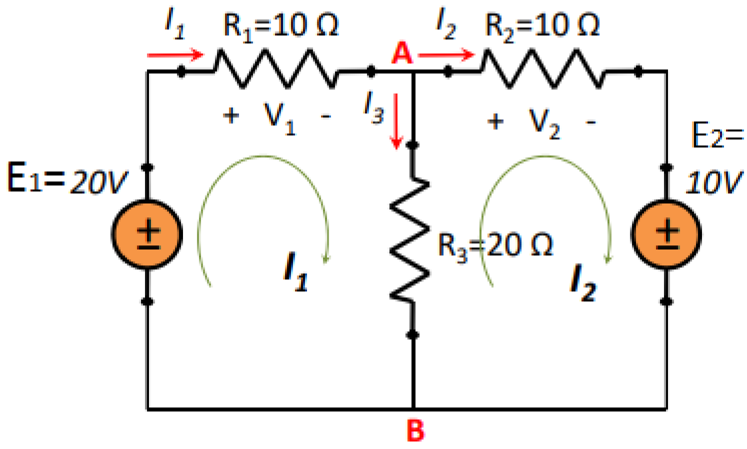
$$I_2 \approx 4{,}2 \cdot 10^{-4}$$

$$I_1 = 0{,}00165$$

τα ρεύματα που διαρρέουν τον κάθε αντιστάτη:

$$I_{R1} = I_{R3} = I_1 = 1{,}65\text{mA}$$
$$I_{R4} = I_{R5} = I_2 = 0{,}42\text{mA}$$
$$I_{R2} = I_1 - I_2 = 1{,}65 - 0{,}42 =$$
$$1.23mA$$

2° Παράδειγμα Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3 των κλάδων



Λύση

Έτσι έχουμε για τα ρεύματα:

• Το βροχικό ρεύμα I_1 είναι ίσο με το κλαδικό ρεύμα I_1 ,

• Το βροχικό ρεύμα I_2 είναι ίσο με το κλαδικό ρεύμα I_2 ,

• Το κλαδικό ρεύμα I_3 , με τη φορά που έχει επιλεγεί, ισούται με τη διαφορά των βροχικών ρευμάτων I_1 -I_2

Οι εξισώσεις Kirchhoff, για κάθε βρόχο του κυκλώματος:

$$-E_1 + I_1 \cdot R_1 + (I_1 - I_2) \cdot R_3 = 0$$
$$(I_2 - I_1) \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2 + E_2 = 0$$

Αναδιατάσσουμε και οι εξισώσεις γίνονται:

$$(R_1 + R_3) \cdot I_1 - R_3 \cdot I_2 = 20$$

$$-R_3 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_2 = -10$$

Σε μορφή πινάκων έχουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αντιστάσεων το σύστημά μας γίνεται: Τα ρεύματα είναι:

$$\begin{bmatrix} 10+20 & -20 \\ -20 & 10+20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Τα ρεύματα είναι:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -20 \\ -10 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{600 - 200}{900 - 400} = \frac{400}{500} = 0{,}8\ A$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 20 \\ -20 & -10 \end{vmatrix}}{500} = \frac{-300 + 400}{500} = \frac{100}{500} = 0{,}2\ A$$

Εξίσωση Kirchhoff για το κόμβο «Α»:

$$\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3 = 0$$

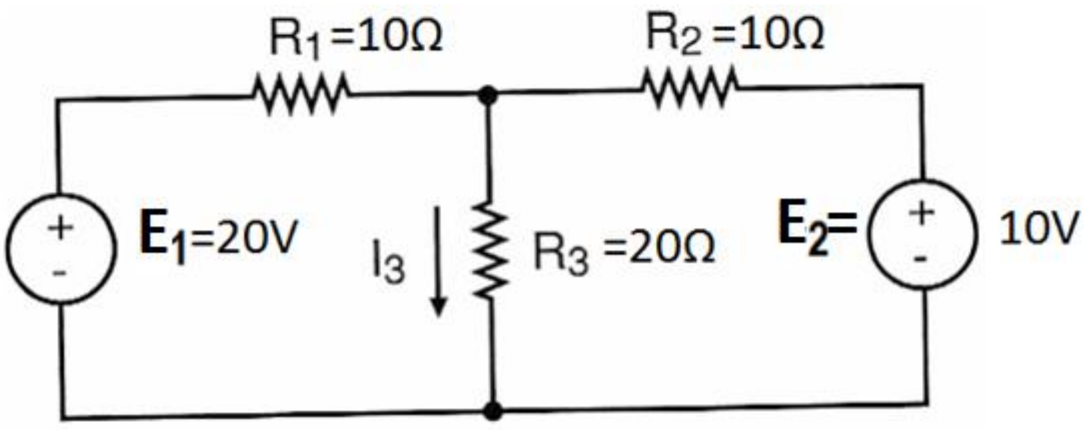
$$\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 = 0{,}8 - 0{,}2 = 0{,}6\mathrm{A}$$

Μέθοδος της ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ

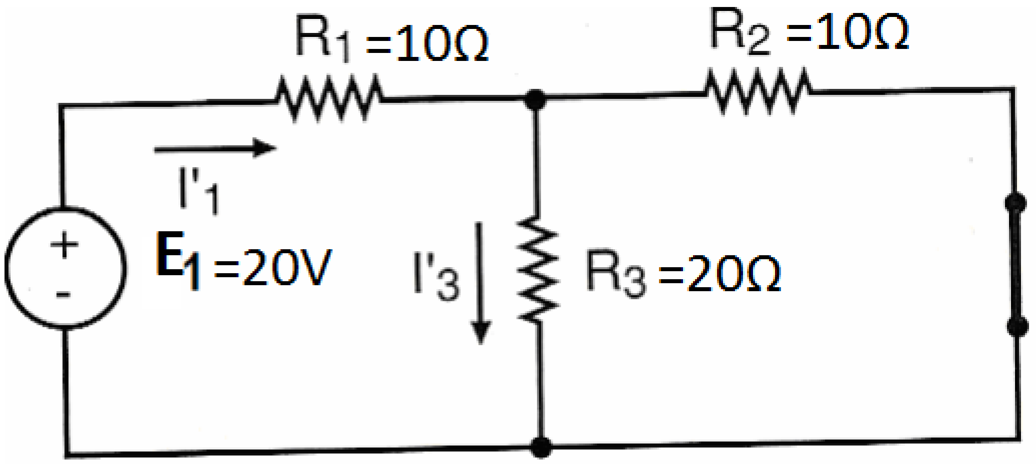
Όταν ένα γραμμικό ηλεκτρικό κύκλω μα διεγείρεται από δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες πηγές ενέργειας, τότε η απόκρισή του (ρεύ μα ή τάση) σε οποιοδήποτε στοιχείο του ισούται με το άθροισμα των αποκρίσεων, που οφείλονται σε κάθε πηγή ξεχωριστά.

Παράδειγμ α : Στο παρακάτω κύκλωμα, που διεγείρεται από δύο πηγές τάσεις V1 και V2, να βρεθεί το ρεύμα I_3 που διαρρέει τον αντιστάτη R_3



Λύση

α) Αρχικά υπολογίζουμε το ρεύμα I_3' που διαρρέει την R_3 και οφείλεται στην πηγή V_1 , όταν η πηγή V_2 είναι μηδενισμένη (βραχυκυκλωμένη).



Η ολική αντίσταση του παραπάνω κυκλώματος ισούται με:

$$R_{01} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 10 + \frac{10*20}{10+20} = 10 + \frac{200}{30} = \frac{50}{3}\Omega$$

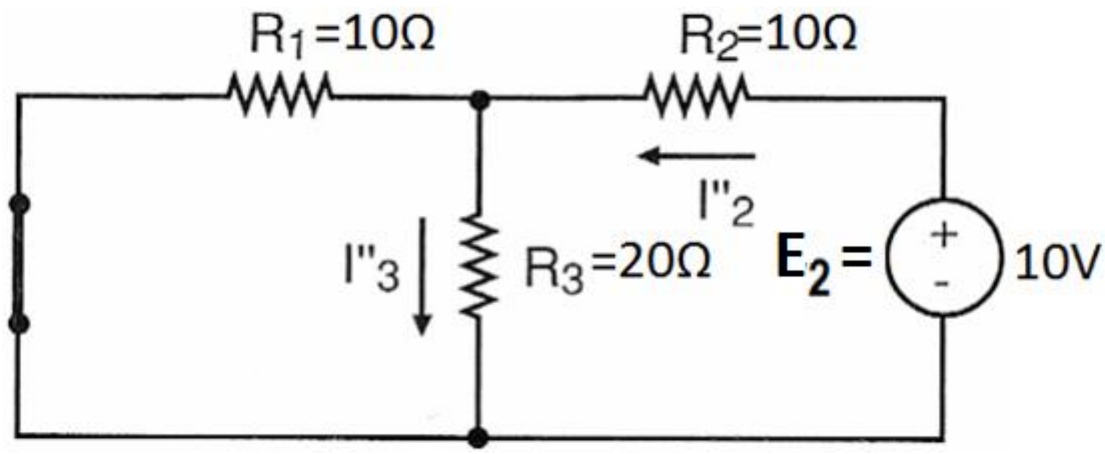
Έτσι το ρεύμα I_1' θα είναι:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_{01}} = \frac{20}{50/3} = \frac{6}{5} = 1{,}2A$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του διαιρέτη ρεύματος, το I_3' θα είναι ίσο με

$$I'_3 = I'_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1{,}2 \frac{10}{10+20} = \frac{12}{30} = 0{,}4\text{A}$$

β) Στη συνέχεια υπολογίζου με το ρεύμα I_3'' που διαρρέει την R_3 και οφείλεται στην πηγή V_2, όταν η πηγή V1 είναι βραχυκυκλωμένη



Η ολική αντίσταση του παραπάνω κυκλώματος ισούται με:

$$R_{02} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 10 + \frac{10*20}{10+20} = \frac{50}{3}\Omega$$

Έτσι το ρεύμα I_2'' θα είναι:

$$I''_2 = \frac{E_2}{R_{02}} = \frac{10}{50/3} = \frac{3}{5} = 0{,}6\text{A}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη μέθοδο του διαιρέτη ρεύματος, το I_3'' θα είναι ίσο με:

$$I''_3 = I''_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 0{,}6\ \frac{10}{10+20} = \frac{0{,}6}{3} = 0{,}2A$$

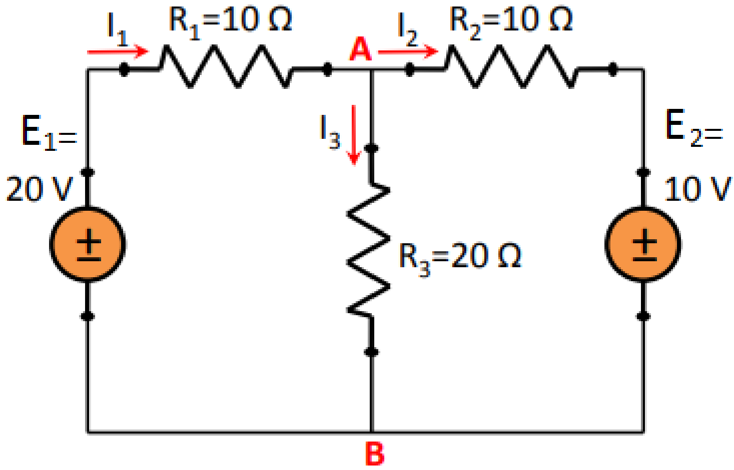
Το ολικό ρεύμα I_3 θα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων I_3' και I_3'' που έχουν την ίδια φορά, δηλαδή:

$$I_3 = I'_3 + I''_3 =$$

$$0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6A$$

Μέθοδος Thevenin

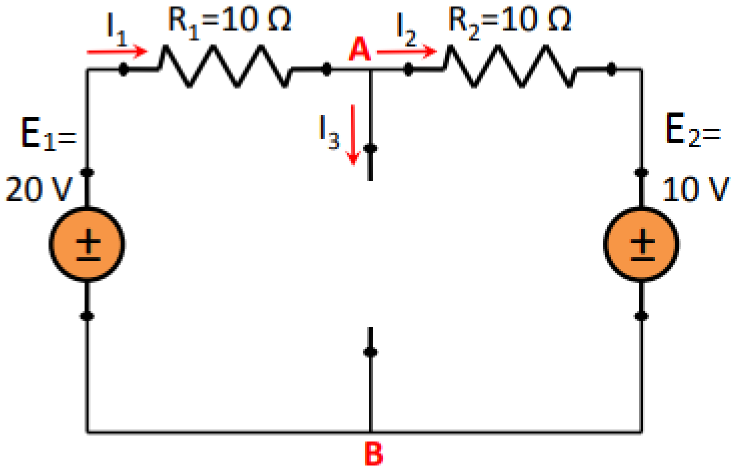
Έστω ότι ζητείται το ρεύμα I_3 στην R_3



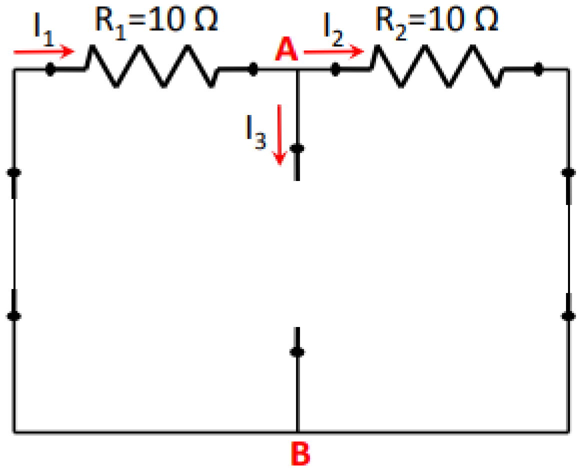
<u>Λύση</u>

Βήμα1ο

Αφαιρείται η R_3



Βήμα 2ο Μηδενίζοντας (βραχυκυκλώνοντας) τις πηγές τάσης υπολογίζεται η ισοδύναμη αντίσταση $R_{Thevenin}$ ως προς τα σημεία α-β.



$$R_{Th} = R_1//R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 * 10}{10 + 10} = \frac{100}{20} = 5\Omega$$

Βήμα 3ο Η τάση μεταξύ των σημείων Α-Β είναι η ισοδύναμη τάση $U_{Thevenin}$, η οποία υπολογίζεται από τον νόμος των τάσεων κατά Kirchhoff για τον παρακάτω βρόγχο :

$$-\mathrm{E}_1 + \mathrm{R}_1\mathrm{I} + \mathrm{R}_2\mathrm{I} + \mathrm{E}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\mathrm{E}_1 + (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)\mathrm{I} + \mathrm{E}_2 = 0$$

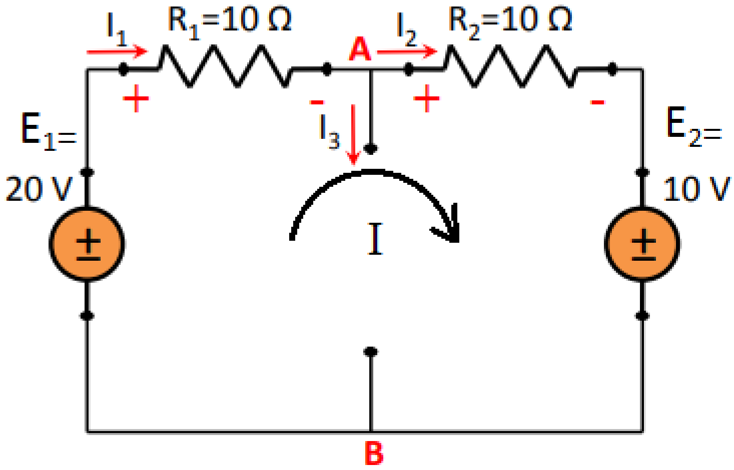
$$\Leftrightarrow$$

$$-20 + (10 + 10)\mathrm{I} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-10 + 20\mathrm{I} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{10}{20} = 0{,}5\mathrm{A}$$



$$-\mathrm{E}_1 + \mathrm{R}_1\mathrm{I} + \mathrm{U}_{\mathrm{AB}} = 0 \Leftrightarrow$$

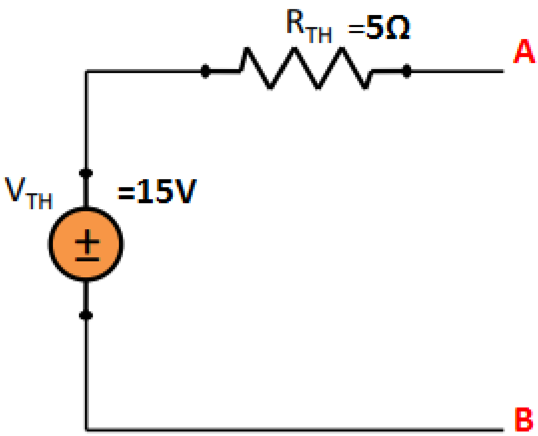
$$\mathrm{U}_{\mathrm{Th}} = \mathrm{U}_{\mathrm{AB}} = \mathrm{E}_1 - \mathrm{R}_1\mathrm{I} = 20 - 10 * 0{,}5 = 15\mathrm{V}$$

ή

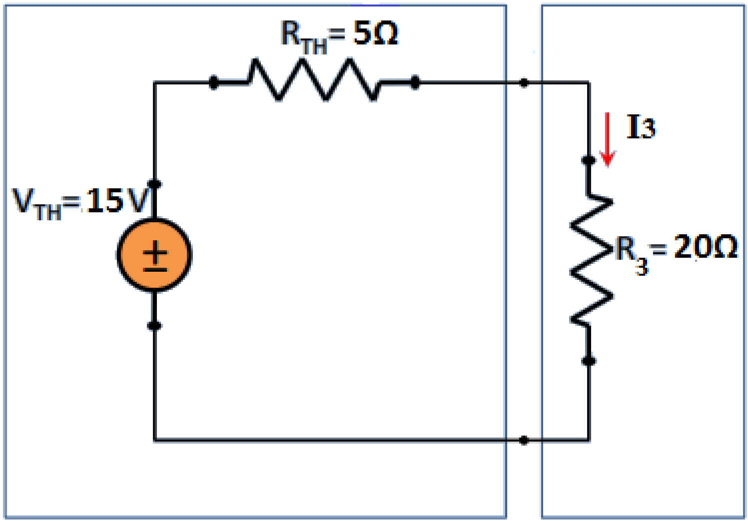
$$-\mathrm{U}_{\mathrm{AB}} + \mathrm{E}_2 + \mathrm{R}_2\mathrm{I} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{U}_{\mathrm{Th}} = \mathrm{U}_{\mathrm{AB}} = \mathrm{R}_2\mathrm{I} + \mathrm{E}_2 = 10 * 0{,}5 + 10 = 15\mathrm{V}$$

Βήμα 4ο Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin:



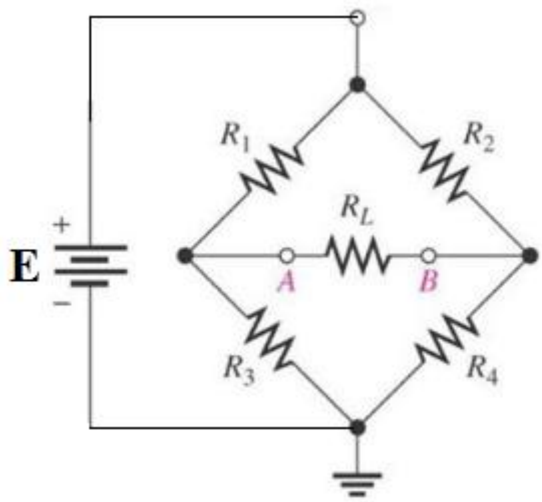
Βήμα 5ο Υπολογισμός του ρεύματος I_3 στην R_3



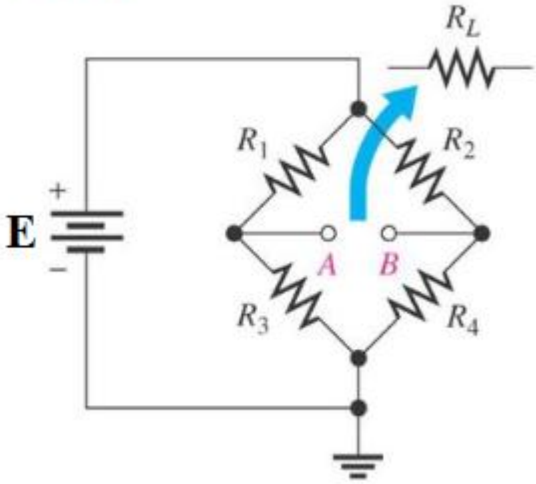
$$I_3 = \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_3} = \frac{15}{5+20} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6A$$

Πρόβλημα:

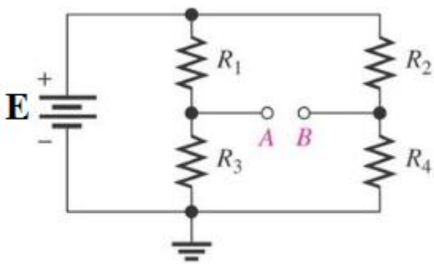
Να υπολογιστεί το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin της γέφυρας Wheatstone μεταξύ των ακροδεκτών εξόδου A κα B.



Λύση



(α) Απομακρύνουμε το φορτίο R_L για να δημιουργήσουμε ένα ανοικτό κύκλωμα μεταξύ των ακροδεκτών εξόδουΑ και Β.

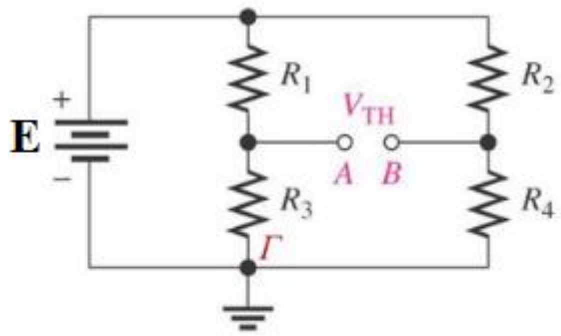


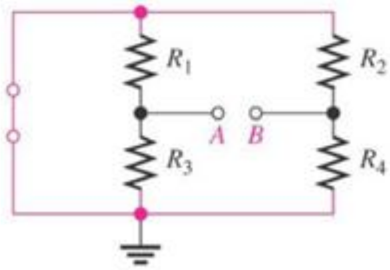
(β) Ξανασχεδιάζουμε το κύκλωμα (αν το επιθυμούμε) για να φανούν καλύτερα οι εν σειρά και παράλληλες αντιστάσεις.

(γ) Βρίσκουμε τη V_{TH} , με τον τύπο του διαιρέτη τάσης.

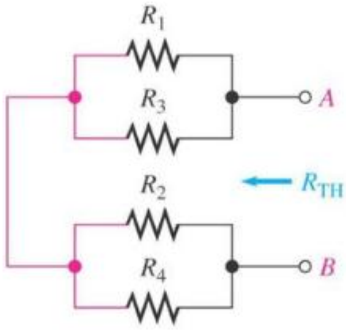
$$\begin{aligned} V_{TH} &= V_A - V_B \\ &= (V_A - V_\Gamma) - (V_B - V_\Gamma) \\ &= V_{R3} - V_{R4} \\ &= \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3}\right)E - \left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)E \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{V_{TH} = \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)E}$$





(δ) Για να βρούμε την ισοδύναμη αντίσταση Thevenin, αντικαθιστούμε την πηγή E με βραχυκύκλωμα

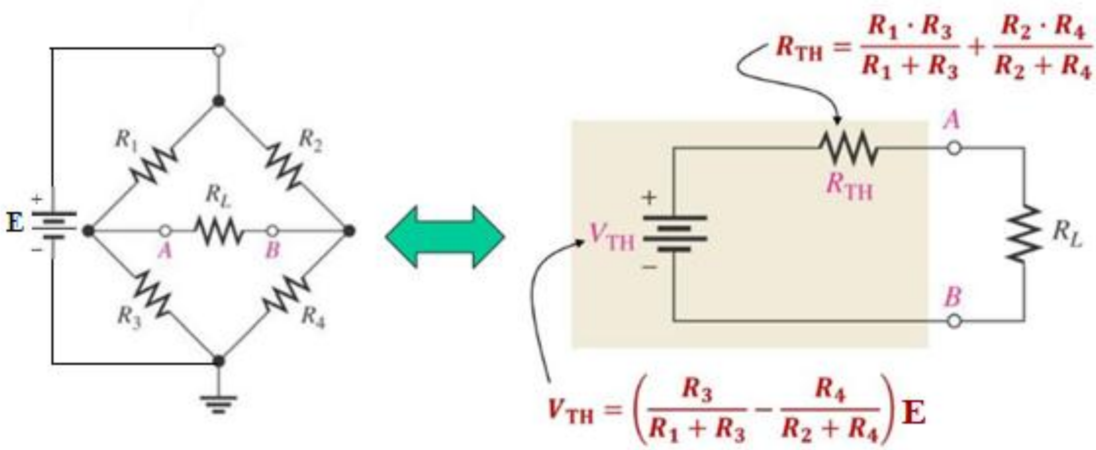


(ε) Επανασχεδιάζουμε (αν το επιθυμούμε) την προηγούμενη εικόνα (δ) και βρίσκουμε την R_{TH}.

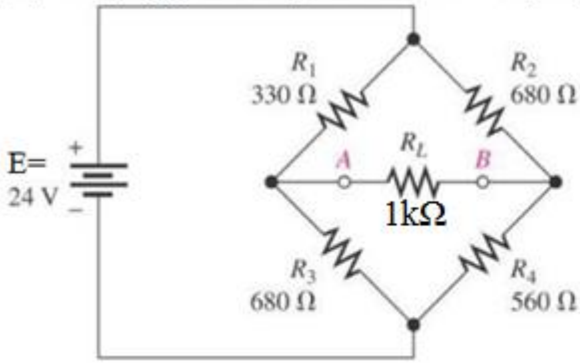
$$R_{TH} = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4$$

$$R_{TH} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4}$$

(στ) Το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin της γέφυρας με το φορτίο R_L επανασυνδεμένο

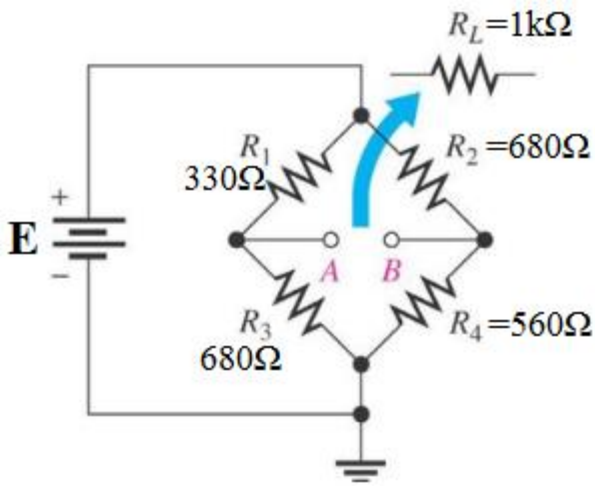


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Προσδιορίστε την τάση και το ρεύμα στην αντίσταση φορτίου, R_L, στο παρακάτω κύκλωμα γέφυρας.

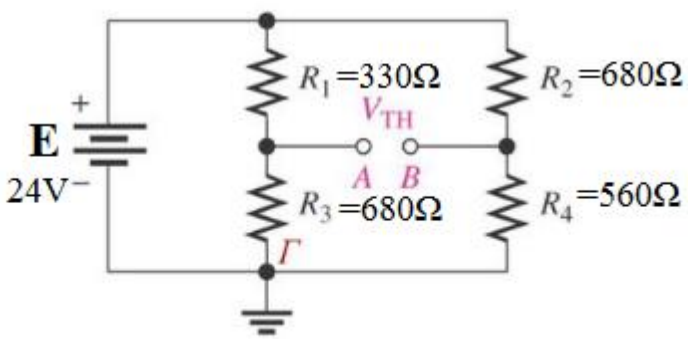


Λύση

Απομακρύνουμε την R_L και υπολογίζουμε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin μεταξύ A και B.



α)Ισοδύναμη τάση Thevenin (U_{Th}).

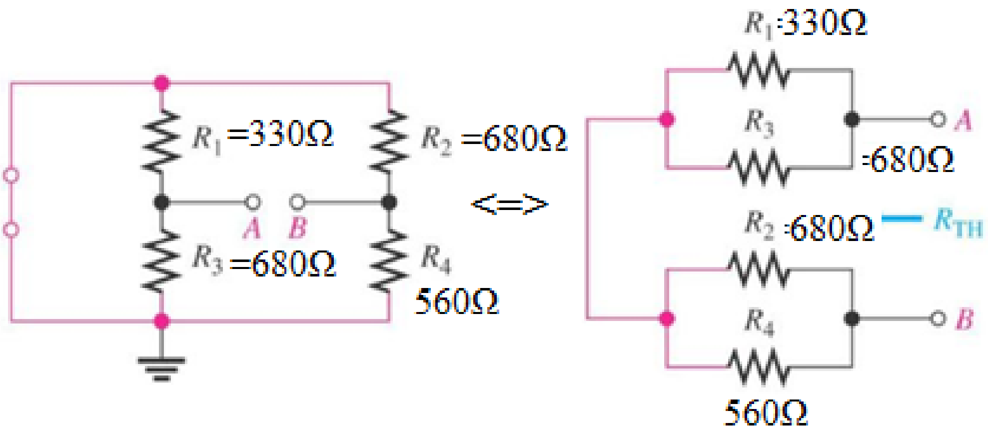


Η ισοδύναμη τάση Thevenin με τη μέθοδο του διαιρέτη τάσης είναι:

$$V_{TH} = V_A - V_B = R_3 * I_{13} - R_4 * I_{24} = \left(\frac{R_3}{R_1+R_3}\right)E - \left(\frac{R_4}{R_2+R_4}\right)E$$

$$= \left(\frac{680\ \Omega}{1010\ \Omega}\right)24 - \left(\frac{560\ \Omega}{1240\ \Omega}\right)24 = 16.16 - 10.84 = 5.32\ V$$

β) Ισοδύναμη αντίσταση R_{Th}.

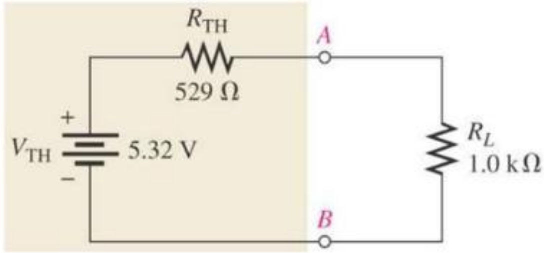


Η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin είναι:

$$R_{TH} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2+R_4}$$

$$= \frac{(330\ \Omega)(680\ \Omega)}{1010\ \Omega} + \frac{(680\ \Omega)(560\ \Omega)}{1240\ \Omega} = 222\ \Omega + 307\ \Omega = 529\ \Omega$$

Επομένως, το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin, έχοντας προσθέσει το φορτίο R_L, είναι:

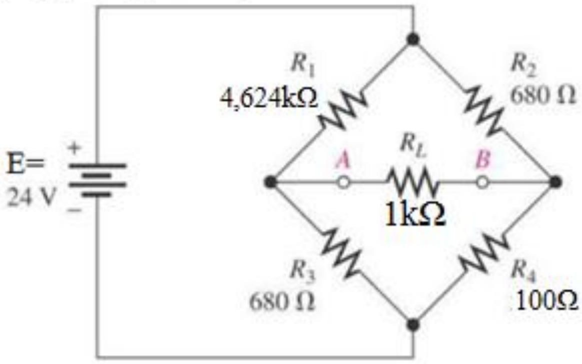


Εύκολα προκύπτει ότι η τάση και το ρεύμα στο φορτίο είναι

$$V_L = \left(\frac{R_L}{R_L + R_{TH}}\right)V_{TH} = \left(\frac{1.0\ \text{k}\Omega}{1.529\ \text{k}\Omega}\right)5.23\ \text{V} = \mathbf{3.48\ V}$$

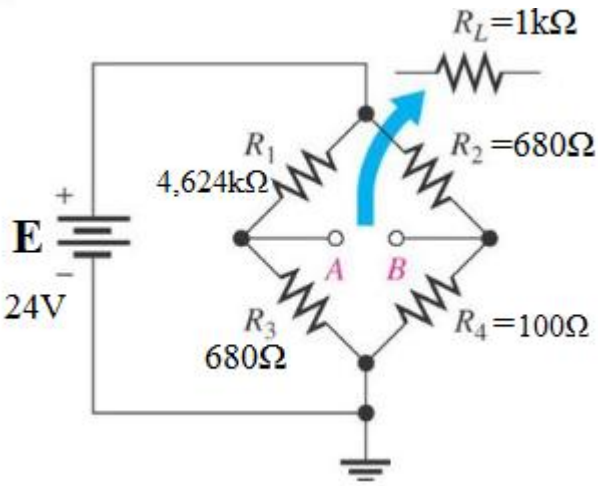
$$I_L = \frac{V_L}{R_L} = \frac{3.48\ \text{V}}{1.0\ \text{k}\Omega} = \mathbf{3.48\ mA}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Προσδιορίστε την τάση και το ρεύμα στην αντίσταση φορτίου, R_L, στο παρακάτω κύκλωμα γέφυρας στην κατάσταση της ισορροπίας.

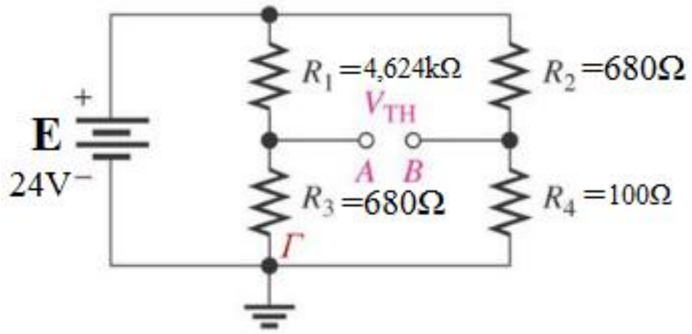


Λύση

Απομακρύνουμε την R_L και υπολογίζουμε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin μεταξύ A και B.



α)Ισοδύναμη τάση Thevenin (U_{Th}).



Η ισοδύναμη τάση Thevenin με τη μέθοδο του διαιρέτη τάσης είναι:

$$V_{TH} = V_A - V_B = \left(\frac{R_3}{R_1+R_3}\right)E - \left(\frac{R_4}{R_2+R_4}\right)E =$$

$$\left(\frac{680}{4624+680}\right)24 - \left(\frac{100}{680+100}\right)24 = \left(\frac{680}{5304}\right)24 - \left(\frac{100}{780}\right)24 =$$

$$0{,}128 \cdot 24 - 0{,}128 \cdot 24 = 0V$$