ΜΟΡΦΕΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β ΒΑΘΜΟΥ

Τριώνυμο λέγεται ένα πολυώνυμο της μορφής :

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \text{όπου}\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}\ \text{με}\ \alpha\neq 0.$$

Διακρίνουσα και **ρίζες** του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ λέγεται η διακρίνουσα και οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Επομένως το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, οπότε:

- Αν $\Delta>0$ το τριώνυμο έχει **δύο ρίζες άνισες** που δίνονται από τον τύπο:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta=0$ το τριώνυμο έχει **δύο ρίζες ίσες** που δίνονται από τον τύπο:

$$x_{1,2}=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta<0$ το τριώνυμο **δεν έχει πραγματικές ρίζες**.

Ι. ΜΟΡΦΕΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Θεώρημα

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$

1. Αν $\boldsymbol{\Delta>0}$, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 και γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)}$$

2. Αν $\boldsymbol{\Delta=0}$, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες $x_1=x_2=\rho$ και γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{f(x)=\alpha(x-\rho)^2}$$

3. Αν $\boldsymbol{\Delta<0}$, το τριώνυμο γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{f(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]}.$$

Παρατηρήσεις

1. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ μπορεί να πάρει την μορφή: $f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$, οπότε

(i) Για $\alpha>0$, τότε το τριώνυμο παίρνει ελάχιστη τιμή $-\frac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$

(ii) Για $\alpha<0$, τότε το τριώνυμο παίρνει μέγιστη τιμή $-\frac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

2. Το προηγούμενο Θεώρημα χρησιμεύει για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο.

3. Είναι φανερό ότι αν το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ έχει διακρίνουσα αρνητική δεν παραγοντοποιείται.

ΙΙ. ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Θεώρημα

Το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α** , μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

- **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.

- **Ομόσημο του α** , σε κάθε άλλη περίπτωση.

Με την μορφή πινάκων έχουμε

1. Αν $\Delta>0$ και x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου τότε:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		**Ομόσημο του α**	0	**Ετερόσημο του α**	0	**Ομόσημο του α**	

2. Αν $\Delta=0$ και ρ η διπλή ρίζα του τριωνύμου τότε:

x	$-\infty$		ρ		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		**Ομόσημο του α**	0	**Ομόσημο του α**	

3. Αν $\Delta<0$ τότε:

x	$-\infty$		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		**Ομόσημο του α**	

ΙΙΙ. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β ΒΑΘΜΟΥ

Ανισώσεις της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ και $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$, $\alpha\neq 0$

Για να λύσουμε μία ανίσωση που έχει η μπορεί να πάρει την μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ με $\alpha\neq 0$, είναι αρκετό να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Σχόλιο

Ανάλογα λύνονται και οι ανισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma\geq 0$ και $\alpha x^2+\beta x+\gamma\leq 0$ με $\alpha\neq 0$.

Παρατήρηση !!!

Θεωρούμε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$

(i) Η ανισότητα $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν $\alpha>0$ και $\Delta<0$

(ii) Η ανισότητα $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν $\alpha<0$ και $\Delta<0$

(iii) Η ανισότητα $\alpha x^2+\beta x+\gamma\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν $\alpha>0$ και $\Delta\leq 0$

(iv) Η ανισότητα $\alpha x^2+\beta x+\gamma\leq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν $\alpha<0$ και $\Delta\leq 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Η λύση της ανίσωσης $x^2<x+6$ είναι:
Α. $x<-3$ ή $x>2$ Β. $-2<x<3$ Γ. $-3<x<2$ Δ. $x>-2$ Ε. $-\infty<x<2$

2. Το πλήθος των λύσεων της ανίσωσης $x^2-8x+12\geq 0$ που ανήκουν στο σύνολο $A=\{x\in\mathbb{Z}/1\leq x\leq 9\}$ είναι
Α. 3 Β. 4 Γ. 5 Δ. 6 Ε. 7

3. Η λύση της ανίσωσης $x|x|-2x<0$ είναι:
Α. $x\in(-\infty,2)$ Β. $x\in(-2,2)$ Γ. $x\in(-2,0)$
Δ. $x\in(2,+\infty)$ Ε. $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$

4. Το άθροισμα των θετικών ακεραίων λύσεων της ανίσωσης $x<\frac{8}{x}+2$ είναι:
Α. 3 Β. 4 Γ. 5 Δ. 6 Ε. 7

5. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\alpha+2+\alpha x+3x-x^2=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση $x_1+x_2>0$, τότε :
Α. $-3<\alpha<1$ Β. $-2<\alpha<+\infty$ Γ. $-\infty<\alpha<-3$ Δ. $-3<\alpha<+\infty$
Ε. $-\infty<\alpha<-2$

6. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2\lambda x+\lambda-1=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>3$, τότε ο λ παίρνει τιμές στο διάστημα
Α. $(-\infty,1)$ Β. $(-\infty,3)$ Γ. $(1,+\infty)$ Δ. $(1,3)$ Ε. $(-3,-1)$

7. Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύουν οι σχέσεις $\alpha^3\cdot\beta^{-7}<0$, $\beta^2-\beta<0$ και $\alpha^3>\alpha$, τότε ο α παίρνει τιμές στο διάστημα
Α. $(1,+\infty)$ Β. $(-\infty,-2)$ Γ. $(0,1)$ Δ. $(-1,0)$ Ε. $(-\infty,-1)$

8. Η παράσταση $\dfrac{(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8}{(x^2-x-2)\cdot(x^2-7x+12)}$ είναι ίση με

Α. $\dfrac{x+1}{x-3}$ Β. $\dfrac{x-1}{x-3}$ Γ. $\dfrac{x+1}{x-4}$ Δ. $\dfrac{x-1}{x-4}$ Ε. 1

9. Η ανίσωση $x(x-4)\geq \mu-2$ είναι αληθής για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν το μ παίρνει τιμές στο διάστημα

Α. $(-\infty,-2)$ Β. $(-\infty,-2]$ Γ. $[0,2]$ Δ. $[2,+\infty)$ Ε. $[3,+\infty)$

10. Η ανίσωση $x^2-\alpha x>-x^2+5x-2$ είναι αληθής για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν

Α. $-9<\alpha<-1$ Β. $-1\leq\alpha\leq 9$ Γ. $\alpha>-1$ Δ. $\alpha<-9$ Ε. $\alpha\in\mathbb{R}-\{-1,-9\}$

11. Η ανίσωση $-x^2+\alpha x-2x-9<0$ είναι αληθής για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν

Α. $-8<\alpha<4$ Β. $-4<\alpha<8$ Γ. $8<\alpha<+\infty$

Δ. $-2<\alpha<+\infty$ Ε. $-\infty<\alpha<-4$

12. Αν $0<\alpha<\beta$ και η ανίσωση $(\beta-\alpha x)\cdot(x+\alpha)\geq 0$ αληθεύει όταν $x\in[-3,2]$, τότε το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ είναι ίσο με

Α. 6 Β. 9 Γ. 12 Δ. 15 Ε. 18

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε δύο τριώνυμα που έχουν ρίζες τους παρακάτω αριθμούς

(i) -2 και -3 (ii) -5 και $\dfrac{1}{2}$ (iii) $\dfrac{1}{3}$ και $-\dfrac{3}{2}$.

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

(i) $\alpha x^2-(2\alpha^2+3)x+6\alpha$, $\alpha\neq 0$ (ii) $x^2+2(\beta-\alpha)x+\alpha^2-2\alpha\beta$.

3. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

(i) $x^2-\psi^2-4x+2\psi+3$ (ii) $x^2-\psi^2-7x+3\psi+10$.

4. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

(i) $\dfrac{3\alpha^2-5\alpha\beta-8\beta^2}{2\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2}$ (ii) $\dfrac{\alpha^2-9\alpha x+14x^2}{\alpha^2-\alpha x-2x^2}$.

5. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

(i) $\dfrac{x^2-(\alpha-2\beta)x-2\alpha\beta}{x^2+(\alpha+2\beta)x+2\alpha\beta}$ (ii) $\dfrac{x^4-38x^2+72}{x^4-39x^2+108}$.

6. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $x \in \mathbb{R}$.
(i) $\left(\kappa^2+1\right)x^2-2\kappa x+1,\ \kappa \in \mathbb{R}$ (ii) $-x^2+2\lambda x-\lambda^2-2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $x^2-3x+5>0$ (ii) $x^2-14x-15<0$ (iii) $2-x-x^2 \geq 0$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $35x^2+x-6 \leq 0$ (ii) $10x^2+19x+6 \geq 0$ (iii) $-6x^2+11-4<0$.

9. Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $5x^2-2(x+3)(x-1)>4x+9$ (ii) $(4x-3)^2+x(7x-6) \leq 2$.

10. Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $\dfrac{x(x-7)}{3}-1<\dfrac{11x}{10}-\dfrac{x-4}{3}$ (ii) $\dfrac{(x+3)^2}{5}-\dfrac{x(2x-3)}{2} \leq \dfrac{(3x-1)^2}{5}-1$.

11. Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{2x}{3} \geq \dfrac{3x-10}{4}$ (ii) $\dfrac{(x-11)^2}{10}-\dfrac{(6x-1)^2}{5}>7-\dfrac{7x-3}{2}$.

12. Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $x^2-5|x|+6<0$ (ii) $x^2-|x|-2 \geq 0$.

13. Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $\left|x^2-2x\right|<x$ (ii) $\left|x^2-3x\right|+x-2<0$.

14. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία το τριώνυμο $f(x)=2x^2-5x+7$ παίρνει τιμές μικρότερες από το τριώνυμο $g(x)=x^2+2x-5$.

15. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία το τριώνυμο $f(x)=3x^2-5x+1$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το τριώνυμο $g(x)=x^2-4x+4$.

16. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $\varphi(x)=4x^2-3x+1-\lambda$ γίνετε θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\alpha-2)x^2-(2\alpha+1)x+\alpha-1=0$ έχει ρίζες πραγματικές άνισες.

18. Για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $\mu x^2-2(\mu-3)x+4=0$ έχει:
(i) Δύο ρίζες πραγματικές άνισες
(ii) Δύο ρίζες ίσες

(iii) Δεν έχει πραγματικές ρίζες.

19. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος και το είδος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:
(i) $(\alpha-2)x^2+2(\alpha-2)x+2=0$ (ii) $\alpha x^2-(\alpha+1)x+2\alpha-1=0$.

20. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λύσετε τις εξισώσεις:
(i) $x^2-\lambda x+\lambda+3=0$ (ii) $(\lambda-1)x^2-2(\lambda-3)x-\lambda+3=0$.

21. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω ανισότητες αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$
(i) $x^2-(\alpha-3)-\alpha+6 \geq 0$ (ii) $(\alpha+4)x^2-2\alpha x+2\alpha-6<0$.

22. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω ανισότητες αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$
(i) $(\alpha-1)x^2-(\alpha+1)x+\alpha+1>0$ (ii) $(\alpha-2)x^2-8x+\alpha+4 \leq 0$.

23. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω ανισότητες αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(i) $x^2-2(4\alpha-1)x+15\alpha^2-2\alpha-7 \geq 0$ (ii) $(\alpha-3)x^2-2\alpha x+3\alpha-6<0$.

24. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+2\lambda x-(\lambda+2)=0$ έχει πραγματικές ρίζες για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

25. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2-2(\kappa+7)x+2\kappa+13$ γίνεται τέλειο τετράγωνο ενός διωνύμου.

26. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2-2(2\kappa-3)x+3\kappa^2+5\kappa+9$ δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

27. Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $f(x)=\beta^2x^2+(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)x+\gamma^2$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

28. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $f(x)=x^2-10\lambda x+7\lambda-2$ αναλύεται σε γινόμενο δυο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

29. Η εξίσωση $3x^2-(\alpha^2-2\alpha+6)x+2\alpha^2-4\alpha=0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει μία ρίζα $x_1=2$.
(i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
(ii) Να βρείτε την ρίζα x_2 της εξίσωσης συναρτήσει του α
(iii) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει $x_2>1$
(iv) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει $x_1^2+x_2^2=4-\dfrac{4(\alpha^2-2\alpha)}{9}$.

30. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2(\lambda+1)x+4\lambda=0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $x_1^2+x_2^2\geq 16-8\lambda$.

31. Αποδείξτε ότι η παράσταση $2x^2-6x\psi+5\psi^2+2x-8\psi+14$ είναι θετική για κάθε $x,\ \psi\in\mathbb{R}$.

32. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x+\kappa=0$ να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$3x_1{x_2}^2+3{x_1}^2x_2+{x_1}^2{x_2}^2\leq -8.$$

33. Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=2|x-2|+3|x-1|-x-4$ και $B=3x-3-3|x^2-4x+3|+9|1-x|-3x^2$

(i) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ και οι δύο παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x

(ii) Αν $x<1$ να αποδείξετε ότι $A+B\leq 0$

(iii) Αν $x\geq 3$ να λύσετε την εξίσωση: $3A-B=18x-48$

(iv) Αν $\left|x-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$ να δείξετε ότι: $2A-3B=3$.