

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β ΒΑΘΜΟΥ

Ι. ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Β ΒΑΘΜΟΥ

Εξίσωση β βαθμού λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$.

Η παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ λέγεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$.

Τα αποτελέσματα σχετικά με τις **ρίζες** της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$	Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$
Αν $\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Αν $\Delta = 0$	Έχει δύο ρίζες ίσες με $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2a}$
Αν $\Delta < 0$	Δεν έχει πραγματικές ρίζες

Παρατηρήσεις

- Ο τύπος $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ισχύει και όταν $\Delta = 0$ οπότε έχουμε $x_{1,2} = -\frac{\beta}{2a}$
- Όταν $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$ η λύση της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ γίνεται με παραγοντοποίηση ή ανάγεται στην λύση εξίσωσης της μορφής $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 3(\sqrt{5} + 2)x + 18\sqrt{5} = 0$

Λύση

Έχουμε

$$\Delta = 9(\sqrt{5} + 2)^2 - 72\sqrt{5} = 9\left[(\sqrt{5} + 2)^2 - 8\sqrt{5}\right] = 9(\sqrt{5} - 2)^2, \text{ οπότε}$$

$$x_{1,2} = \frac{3(\sqrt{5} + 2) \pm 3(\sqrt{5} - 2)}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3\sqrt{5} \\ x_2 = 6 \end{cases}.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β ΒΑΘΜΟΥ

Η λύση πολλών εξισώσεων ανάγεται στην λύση εξισώσεων δεύτερου βαθμού.

Α. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**Παράδειγμα**

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3x+5}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} + \frac{3}{2} = 0$.

Λύση

Έχουμε Ε.Κ.Π = $2(x-2)(x+2) \neq 0$ δηλαδή $x \neq 2$ και $x \neq -2$, οπότε

$$\frac{3x+5}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x-2)(x+2) \cdot \frac{3x+5}{x-2} - 2(x-2)(x+2) \cdot \frac{x-2}{x+2} + 2(x-2)(x+2) \cdot \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x+2) \cdot (3x+5) - 2(x-2)^2 + 3(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(3x^2 + 11x + 10) - 2(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$6x^2 + 22x + 20 - 2x^2 + 8x - 8 + 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 30x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(7x+30) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ή } x = -\frac{30}{7} \right).$$

Και οι δύο ρίζες είναι δεκτές.

Β. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Λέγονται οι εξισώσεις που περιέχουν τον άγνωστο στον εκθέτη μιας δύναμης.

Γνωρίζουμε ότι: αν $a > 0$ και $a \neq 1$ ισχύει η ισοδυναμία $a^k = a^\lambda \Leftrightarrow k = \lambda$. Επομένως

για να λύσουμε μια εκθετική εξίσωση την μετατρέπουμε στη μορφή $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, οπότε θα είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = g(x)$, δηλαδή

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $5^{x^2-3x-4} = 1$

Λύση

Έχουμε

$$5^{x^2-3x-4} = 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-3x-4} = 5^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ή } x = -1)$$

Γ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ (ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ)**Ι. ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

Μία εξίσωση λέγεται **διτετραγώνη** όταν έχει μορφή $ax^4 + bx^2 + \gamma = 0$, $a \neq 0$.

Για να λύσουμε μία εξίσωση αυτής της μορφής, θέτουμε $x^2 = \omega$, οπότε γίνεται $a\omega^2 + b\omega + \gamma = 0$ και λύνεται κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ (Διτετράγωνη).

Λύση

Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η εξίσωση γίνεται: $\omega^2 - 8\omega - 9 = 0$

$$\Delta = 64 + 36 = 100, \omega_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{2} = 4 \pm 5 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 9 \\ \omega_2 = -1 \end{cases}$$

Άρα

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \Leftrightarrow (x_1 = 3 \text{ ή } x_2 = -3) \text{ ή}$$

$x^2 = -1$ που είναι αδύνατη.

II. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ**Παράδειγμα**

Να λυθεί η εξίσωση: $(x-5)^2 - 8|x-5| + 7 = 0$.

Λύση

Έχουμε $(x-5)^2 - 8|x-5| + 7 = 0 \Leftrightarrow |x-5|^2 - 8|x-5| + 7 = 0$ (1). Θέτουμε $|x-5| = \omega$ και η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega^2 - 8\omega + 7 = 0$.

$$\Delta = 64 + 28 = 36, \omega_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1 \\ \omega_2 = 7 \end{cases}$$

Άρα

$$|x-5| = 1 \Leftrightarrow x-5 = \pm 1 \Leftrightarrow (x = 6 \text{ ή } x = 4) \text{ ή}$$

$$|x-5| = 7 \Leftrightarrow x-5 = \pm 7 \Leftrightarrow (x = 12 \text{ ή } x = -2).$$

Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ

Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι για να λύσουμε μία πολυωνυμική εξίσωση:

Η μέθοδος της παραγοντοποίησης

Αν $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο n -βαθμού και $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdots P_k(x)$, $k \in \mathbb{N}^*$, όπου $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)$ είναι πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού, τότε

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow [P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } P_k(x) = 0]$$

οπότε η λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης ανάγεται στην λύση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x = 0$.

Λύση

Έχουμε

$$3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (3x^4 - 12x^2) + (x^3 - 4x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2(x^2 - 4) + x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2)(x+2)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0 \text{ ή } x_2 = 2 \text{ ή } x_3 = -2 \text{ ή } x_4 = -\frac{1}{3}).$$

Η μέθοδος της αλλαγής μεταβλητής (με την χρήση βοηθητικού αγνώστου).

Παράδειγμα

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$(i) (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 + x - 3) = 12 \quad (ii) \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5.$$

Λύση

(i) Θέτουμε $x^2 + x - 2 = \psi$, οπότε $x^2 + x - 3 = \psi - 1$ και έχουμε
 $(x^2 + x - 2) \cdot (x^2 + x - 3) = 12 \Leftrightarrow \psi(\psi - 1) = 12 \Leftrightarrow \psi^2 - \psi - 12 = 0$

$$\Delta = 1 + 48 = 49, \psi_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} \psi_1 = 4 \\ \psi_2 = -3 \end{cases}. \text{ Επομένως}$$

$$\bullet \quad x^2 + x - 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0, \Delta = 1 + 24 = 25, x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Ή

$$\bullet \quad x^2 + x - 2 = -3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0, \Delta = 1 - 4 = -3 \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες.}$$

(ii) Πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -\frac{1}{2}$. Θέτουμε $\frac{2x+1}{x} = \psi$ και έχουμε:

$$\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5 \Leftrightarrow \psi + \frac{4}{\psi} = 5 \Leftrightarrow \psi^2 - 5\psi + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9, \psi_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} \psi_1 = 4 \\ \psi_2 = 1 \end{cases}. \text{ Επομένως}$$

$$\bullet \quad \frac{2x+1}{x} = 4 \Leftrightarrow 4x = 2x+1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

Ή

$$\bullet \quad \frac{2x+1}{x} = 1 \Leftrightarrow 2x+1 = x \Leftrightarrow x_2 = -1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

- Μία ρίζα της εξίσωσης $2\alpha^2x^2 - 7\alpha x - 15 = 0$, $\alpha \neq 0$ είναι ίση με
 Α. α Β. 3 Γ. $-\frac{3}{2\alpha}$ Δ. $\frac{1}{\alpha}$ Ε. 5
- Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $2(3x+1)^2 - 3(3x+1) - 5 = 0$ είναι
 Α. $\left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$ Β. $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ Γ. $\left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$ Δ. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ Ε. $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$
- Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $\frac{5}{3-\alpha} + \frac{5\alpha-10}{\alpha^2-5\alpha+6} = 0$ είναι
 Α. $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ Β. $\{2, 3\}$ Γ. $\{2\}$ Δ. \mathbb{R} Ε. $\mathbb{R} - \{3\}$
- Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $\left(\frac{3x}{x-4}\right)^2 - 4\left(\frac{3x}{x-4}\right) + 3 = 0$ είναι
 Α. $\{-2, 3\}$ Β. $\{3, 1\}$ Γ. $\{-2\}$ Δ. $\{-3, 1\}$ Ε. $\{1\}$
- Ποιο από τα παρακάτω είναι ρίζα της εξίσωσης $\frac{x+\alpha}{x-\alpha} - \frac{2x}{x+\alpha} = \frac{\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$
 Α. -4α Β. -2α Γ. 2α Δ. 3α Ε. 4α
- Αν x , $x+1$ και $x-7$ είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε το x είναι ίσο με
 Α. 4 Β. 12 Γ. 4 ή 12 Δ. 4 ή 8 Ε. 10

Εξισώσεις με απόλυτα β βαθμού

- Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $x^2 + |x| - 6 = 0$ είναι
 Α. $\{3, -3, 2, -2\}$ Β. $\{3, -3, 2\}$ Γ. $\{-2, 2, 3\}$ Δ. $\{2, -2\}$ Ε. $\{3, -3\}$
- Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $x|x-1| + 6 = 0$ είναι
 Α. $\{-2, 3\}$ Β. $\{-3, 2\}$ Γ. $\{-3, -2\}$ Δ. $\{3\}$ Ε. $\{-2\}$
- Το γινόμενο όλων των ριζών της εξίσωσης $2|x-1| = |x^2 + 2x - 3|$ είναι:
 Α. -5 Β. 0 Γ. 5 Δ. 10 Ε. 12
- Το άθροισμα όλων των ριζών της εξίσωσης $|x-2| + \frac{4}{|x-2|} = 5$ είναι ίσο με
 Α. 10 Β. 8 Γ. 6 Δ. 4 Ε. 2

Εκθετικές Εξισώσεις

11. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$ είναι

A. $\{0, 2\}$ B. $\{-2, 4\}$ Γ. $\{2, 3\}$ Δ. $\{-2, 3\}$ E. $\left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

12. Η ρίζα της εξίσωσης $80 - 2^{x+1} = 4^x$ είναι ίση με

A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. $\frac{3}{2}$ E. $\frac{5}{2}$

13. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $2^{x^2-x+3} - 2^{x^2-x+1} + 3 \cdot 2^{x^2-x} = 36$ είναι:

A. $\{-1\}$ B. $\{1\}$ Γ. $\{2\}$ Δ. $\{-1, 2\}$ E. $\{1, 2\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Λύση εξίσωσης β βαθμού

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $(x-2)^2 - 9 = 0$ (ii) $(2x-5)^2 - 49 = 0$ (iii) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{49} = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $4x^2 + 20x = 0$ (ii) $4x^3 - 100x = 0$ (iii) $4x^2 + 6x = 9x^2 - 14x$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $3x^2 + 10x + 3 = 0$ (ii) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $x^2 - \sqrt{3}x - 6 = 0$ (ii) $16z^2 - 8\sqrt{2}z + 1 = 0$ (iii) $\sqrt{7}\psi^2 - 8\sqrt{2}\psi + 4\sqrt{7} = 0$.

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $x^2 - (6 + \sqrt{3})x + 6\sqrt{3} = 0$ (ii) $x^2 + (5 - \sqrt{10})x - 5\sqrt{10} = 0$

Κλασματικές εξισώσεις

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = 4 \left(\frac{1+t^2}{t^2} - \frac{3}{2t} \right)$ (ii) $\frac{6}{\psi^2-1} - \frac{2}{\psi-1} = 2 - \frac{\psi+4}{\psi+1}$.

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\frac{2}{3-z} - \frac{5}{1-z} + \frac{4}{(z-3)(z-1)} = 7$ (ii) $\frac{6}{4x^2-1} - \frac{2}{2x-1} = 1 - \frac{3}{2x+1}$.

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) \frac{3x-1}{x+2} - \frac{18}{2-x} = \frac{7x^2-28}{x^2-4} + \frac{7}{2+x} \quad (ii) \frac{16}{x^2-9} - \frac{9}{x^2-16} = \frac{18}{x^2+x-12} - \frac{8}{x^2-x-12}$$

Εξισώσεις β βαθμού με παράμετρο

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) x^2 - 3ax - 4a^2 = 0 \quad (ii) x^2 + 8ax + 15a^2 = 0.$$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) \psi^2 - (\alpha - 5)\psi - 5\alpha = 0 \quad (ii) \psi^2 - 2\alpha\psi + \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \quad (ii) x^2 - 2\mu x + \mu^2 - \nu^2 = 0.$$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) \alpha\psi^2 - (\alpha^2 - 1)\psi - \alpha = 0, \alpha \neq 0 \quad (ii) (\alpha x + \beta)^2 + (\alpha - \beta x)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2).$$

26. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $(2\alpha - \beta)x^2 - 4\alpha x + 4\beta = 0$ έχει μία ρίζα διπλή, τότε η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2x + 3(\alpha - \beta) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

27. Να αποδείξετε ότι: αν η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες, τότε και η εξίσωση $x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + 2\beta(\alpha + \gamma) + 3\alpha\gamma = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Υπολογισμός παραμέτρων

28. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ίσες ρίζες

$$(i) (2\alpha - 5)x^2 - 2(\alpha - 1)x + 3 = 0 \quad (ii) x^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 3} \cdot x + 4 = 0.$$

29. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - (\alpha + 6)x - 2(\alpha^2 + 2) = 0$, έχει μία ρίζα τον αριθμό 11. Κατόπιν να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

30. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\alpha - 4)x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha^2 + 2 = 0$, $\alpha \neq 4$ έχει μία ρίζα τον αριθμό 2. Κατόπιν να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

31. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ να έχει ρίζες ίσες με α και β .

32. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, οι εξισώσεις $x^2 - (3\alpha + 2)x + 2(2\alpha + 1) = 0$ και $x^2 + (3\alpha + 8)x - 2(2\alpha - 1) = 0$ έχουν μία ρίζα κοινή.

Διτετράγωνες εξισώσεις

33. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ (ii) $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$.

34. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ (ii) $15x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

35. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ (ii) $x^4 - (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha^2 \cdot \beta^2 = 0$.

Εξισώσεις με απόλυτα β βαθμού

36. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $x^2 - 6|x| = 0$ (ii) $|x^2 + 3x| = 0$ (iii) $(2x - 5)^2 - |2x - 5| = 0$.

37. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $x^2 - 4|x| + 3 = 0$ (ii) $(x + 1)^2 - 7|x + 1| + 10 = 0$.

38. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $4x^2 - 4x - 3|2x - 1| + 3 = 0$ (ii) $|2x - x^2 - 3| = 2$.

39. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $|x^2 + x + 1| = 3$ (ii) $|x^2 - x + 1| = 3$.

40. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $|3x - x^2 - 1| = |2x - 2 - x^2|$ (ii) $||x^2 - 4x| - 3| = 1$.

41. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $|x^2 - x - 3| = x + 1$ (ii) $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$.

42. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $x^2 + 3x + |x + 2| = 1$ (ii) $|x^2 - x - 6| - 2|x + 2| - |x - 3| + 2 = 0$.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις (με παραγοντοποίηση)

43. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $x^4 - 4x^2 = 0$ (ii) $x^4 - 8x = 0$ (ii) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

44. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $2\psi^3 - 7\psi^2 + 7\psi - 2 = 0$ (ii) $x^4 - 16 - 5x(x^2 - 4) = 0$.

45. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) x^3 - (\alpha^2 + 1)x + \alpha = 0 \quad (ii) z^5 - \alpha^2 z^3 + \alpha^3 z^2 - \alpha^5 = 0.$$

46. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0 \quad (ii) x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0.$$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις (με αλλαγή μεταβλητής)

47. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$(i) (x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x - 3) + 4 = 0 \quad (ii) (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12.$$

48. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) (x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1 \quad (ii) (x^2 - 3x + 1)^2 = 8x^2 - 24x + 41.$$

49. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) (x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 24 \quad (ii) x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 15.$$

50. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) (x + 2)(x - 4)(x + 6)(x - 8) = 225 \quad (ii) (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3.$$

51. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) \left(\frac{1}{x} - 2\right)^2 + \frac{1}{x} - 14 = 0 \quad (ii) \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \frac{1-x}{1+x} - 20 = 0.$$

52. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \quad (ii) x^2 + \frac{4}{x^2} - 8\left(x - \frac{2}{x}\right) - 4 = 0$$

Κλασματικές εξισώσεις

53. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) x^2 - 4x + \frac{10}{x^2 - 4x + 5} = 2 \quad (ii) \frac{10}{1 + x + x^2} = 6 - x - x^2.$$

54. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) \frac{x^2 + x - 7}{x} - \frac{35x}{x^2 + x - 7} = 2 \quad (ii) \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} - \frac{20x - 20}{x^2 - 2x + 5} = 1.$$

55. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) \frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5} \quad (ii) x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2.$$