ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ - ΡΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Α. ΠΡΟΣΗΜΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Μέχρι τώρα ξέρουμε να βρίσκουμε το πρόσημο ενός πολυωνύμου $f(x)$ πρώτου βαθμού ή δεύτερου βαθμού.
Για να βρούμε το πρόσημο ενός πολυωνύμου $f(x)$ **βαθμού μεγαλύτερου του δεύτερου** το μετασχηματίζουμε σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων.
Αν $f(x)=p(x)\cdot q(x)\cdot r(x)\cdots w(x)$, όπου $p(x)$, $q(x)$, …. $w(x)$ είναι πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού τότε κάνουμε τα εξής:

- Βρίσκουμε τα πρόσημα των πολυωνύμων $p(x)$, $q(x)$, …., $w(x)$, τα οποία γνωρίζουμε αν βρούμε τις ρίζες τους.
- Στον ίδιο πίνακα παριστάνουμε τα πρόσημα των πολυωνύμων $p(x)$, $q(x)$, …., $w(x)$ και εύκολα βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πρόσημο του γινομένου:
$$P(x)=(x+2)(4-x)\left(x^2-3x+2\right)\left(3+2x-x^2\right)\left(x^2-3x+4\right).$$

Λύση

Το διώνυμο $x+2$ έχει ρίζα το -2
Το διώνυμο $4-x$ έχει ρίζα το 4
Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει ρίζες τους 1 και 2.
Το τριώνυμο $3+2x-x^2$ έχει ρίζες τους -1 και 3.
Το τριώνυμο x^2-3x+4 δεν έχει ρίζες.
Έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		3		4		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-3x+2		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3+2x-x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-3x+4		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
Γ		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Β. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ

Λέγονται οι ανισώσεις της μορφής $f(x)>0$ ή $f(x)<0$, όπου $f(x)$ πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του δεύτερου.

Για να λύσουμε τις ανισώσεις αυτές μετατρέπουμε το πολυώνυμο $f(x)$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων και βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου.
Όμοια λύνονται και οι ανίσωσης της μορφής $f(x)\geq 0$ ή $f(x)\leq 0$.

Γ. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Λέγονται οι ανισώσεις της μορφής $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ ή $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ ή $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$ ή $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$, όπου $f(x)$, $g(x)$ πολυώνυμα.
Για να λύσουμε τις ανισώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες:

1. $\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$
2. $\frac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$
3. $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[f(x)\cdot g(x)\geq 0 \text{ και } g(x)\neq 0\right]$
4. $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \Leftrightarrow \left[f(x)\cdot g(x)\leq 0 \text{ και } g(x)\neq 0\right]$.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x)=(x-\rho_1)^{\nu_1}(x-\rho_2)^{\nu_2}\cdots(x-\rho_\kappa)^{\nu_\kappa}$, όπου ν_1, $\nu_2,\ldots,$ ν_κ, είναι φυσικοί αριθμοί και ρ_1, $\rho_2,\ldots,$ ρ_κ είναι πραγματικοί αριθμοί .
Είναι φανερό ότι οι αριθμοί ρ_1, $\rho_2,\ldots,$ ρ_κ είναι ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$.

Ισχύουν τα επόμενα:

I. Αν γ είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς ρ_1, $\rho_2,\ldots,$ ρ_κ, τότε το πολυώνυμο $f(x)$ είναι θετικό στο διάστημα $(\gamma,+\infty)$.

II. Αν ρ_i, $i=1,2,\ldots,\kappa$ είναι ένα σημείο τέτοιο ώστε ο εκθέτης ν_i του παράγοντα $(x-\rho_i)^{\nu_i}$ είναι **περιττός** αριθμός, τότε δεξιά και αριστερά του ρ_i το πολυώνυμο $f(x)$ έχει διαφορετικό πρόσημο και το σημείο ρ_i λέγεται **απλό σημείο**. Αυτό σημαίνει ότι όταν **περνάμε από ένα απλό σημείο, το πολυώνυμο αλλάζει πρόσημο.**

III. Αν ρ_i ένα είναι σημείο τέτοιο ώστε ο εκθέτης ν_i του παράγοντα $(x-\rho_i)^{\nu_i}$ είναι άρτιος αριθμός, τότε δεξιά και αριστερά του ρ_i το πολυώνυμο $f(x)$ έχει το ίδιο πρόσημο και το σημείο ρ_i λέγεται **διπλό σημείο**. Αυτό σημαίνει ότι **όταν περνάμε από ένα διπλό σημείο, το πολυώνυμο δεν αλλάζει πρόσημο.**

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να βρούμε το πρόσημο του πολυωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. Κάνουμε τα εξής:

- Πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών σημειώνουμε με μαύρους κύκλους όλες τις ρίζες του πολυωνύμου.

- **Από δεξιά προς τα αριστερά**, αρχίζοντας πάνω από την πραγματική ευθεία κατασκευάζουμε μια **κυματοειδή καμπύλη,** η οποία περνά από όλα τα σημεία που έχουμε σημειώσει προηγούμενα, με τρόπο ώστε όταν η καμπύλη περνά από ένα απλό σημείο, τότε τέμνει την πραγματική ευθεία και όταν περνά από ένα διπλό σημείο, τότε η καμπύλη παραμένει προς την ίδια πλευρά της πραγματικής ευθείας. Αυτή η κυματοειδής καμπύλη λέγεται **καμπύλη προσήμων.**

- Το πολυώνυμο $f(x)$ είναι **θετικό** στα διαστήματα τα οποία η καμπύλη βρίσκεται **πάνω από την πραγματική ευθεία** και **αρνητικό** στα διαστήματα τα οποία η καμπύλη βρίσκεται **κάτω από την πραγματική ευθεία.**

Παράδειγμα

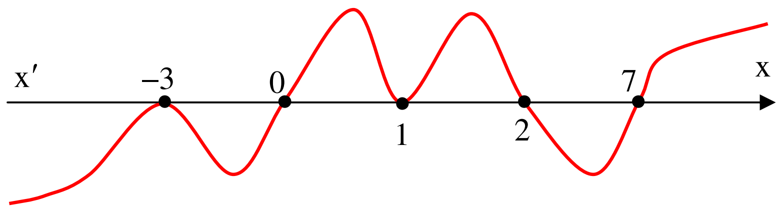
Θεωρούμε το πολυώνυμο: $f(x)=x^5(x-2)(x+3)^4(x-7)^3(x-1)^8$

▷ Η μεγαλύτερη ρίζα του πολυωνύμου είναι $x=7$, οπότε στο διάστημα $(7,+\infty)$ το $f(x)$ είναι θετικό.

▷ Οι αριθμοί 0, 2 και 7 είναι απλά σημεία γιατί τα διώνυμα x, $x-2$ και $x-7$ είναι υψωμένα σε περιττή δύναμη. Όταν περνάμε από τα σημεία αυτά, το πολυώνυμο αλλάζει πρόσημο.

▷ Οι αριθμοί -3 και 1 είναι διπλά σημεία γιατί τα διώνυμα $x+3$ και $x-1$ είναι υψωμένα σε άρτια δύναμη. Όταν περνάμε από τα σημεία αυτά, το πολυώνυμο δεν αλλάζει πρόσημο.

Η καμπύλη προσήμων του πολυωνύμου $f(x)$ είναι:



Συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ παίρνει:

- Θετικές τιμές όταν $x \in (0,1)\cup(1,2)\cup(7,+\infty)$

- Αρνητικές τιμές όταν $x \in (-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(2,7)$

Όλα αυτά είναι χρήσιμα για την λύση ανισώσεων που έχουν ή μπορούν να πάρουν την μορφή

$$(x-\rho_1)^{\nu_1}(x-\rho_2)^{\nu_2}\cdots(x-\rho_\kappa)^{\nu_\kappa}>0 \ \ (<0)$$

Για να λύσουμε την ανίσωση κάνουμε τα εξής:
Κατασκευάζουμε την καμπύλη προσήμων του πολυωνύμου
$f(x)=(x-\rho_1)^{\nu_1}(x-\rho_2)^{\nu_2}\cdots(x-\rho_\kappa)^{\nu_\kappa}$ και επιλέγουμε τα κατάλληλα διαστήματα σύμφωνα με το σημείο της ανισότητας. Η ένωση αυτών των διαστημάτων αποτελεί την λύση της ανίσωσης.

Παρατηρήσεις

1. Είναι φανερό ότι τα προηγούμενα ισχύουν και όταν έχουμε ανίσωση της μορφής:

$$\frac{(x-\alpha_1)^{\nu_1}(x-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(x-\alpha_\kappa)^{\nu_\kappa}}{(x-\beta_1)^{\mu_1}(x-\beta_2)^{\mu_2}\cdots(x-\beta_\rho)^{\mu_\rho}}>0 \ \ (<0).$$

η οποία όταν $x\neq\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\beta_\rho$, είναι ισοδύναμη με την ανισώση

$$(x-\alpha_1)^{\nu_1}(x-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(x-\alpha_\kappa)^{\nu_\kappa}(x-\beta_1)^{\mu_1}(x-\beta_2)^{\mu_2}\cdots(x-\beta_\rho)^{\mu_\rho}>0 \ \ (<0).$$

2. Αν έχουμε ανίσωση της μορφής $f(x)\geq 0$ ή $f(x)\leq 0$, όπου

$$f(x)=\frac{(x-\alpha_1)^{\nu_1}(x-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(x-\alpha_\kappa)^{\nu_\kappa}}{(x-\beta_1)^{\mu_1}(x-\beta_2)^{\mu_2}\cdots(x-\beta_\rho)^{\mu_\rho}}$$

πρέπει $x\neq\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\rho$, οπότε τα σημεία μηδενισμού του αριθμητή τα σημειώνουμε με μαύρους κύκλους και συμπεριλαμβάνονται στη λύση, ενώ τα σημεία μηδενισμού του παρανομαστή τα σημειώνουμε με λευκούς κύκλους και δεν συμπεριλαμβάνονται στη λύση.

3. Αν στους όρους της ρητής παράστασης $f(x)$ υπάρχουν παράγοντες καθολικά μη αρνητικοί, μπορούμε να τους παραλείψουμε όταν έχουμε ανίσωση της μορφής $f(x)>0$ ή $f(x)<0$, ενώ όταν έχουμε ανίσωση της μορφής $f(x)\geq 0$ ή $f(x)\leq 0$, πρέπει στην λύση να συμπεριλάβουμε τις ρίζες τους, οι οποίες όμως δεν μηδενίζουν τον παρανομαστή.
Αν υπάρχουν παράγοντες καθολικά μη θετικοί, τους αλλάζουμε πρόσημο.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανίσωση: $\displaystyle \frac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^5}>0.$

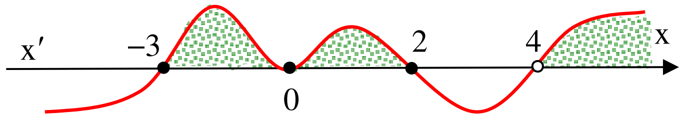
Λύση

Έχουμε

$$\frac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^5}>0 \Leftrightarrow x^2(x-2)^3(x+3)(x-4)^5>0,\ x\neq 4.$$

Τα σημεία μηδενισμού των διωνύνων που περιέχονται στο γινόμενο είναι $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-3$ και $x_4=4$. Το $x_1=0$ είναι διπλό σημείο, τα $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_4=4$ είναι απλά σημεία και στο $x_4=4$ δεν ορίζεται η ανίσωση.

Κατασκευάζουμε την καμπύλη προσήμων και από αυτήν συμπεραίνουμε ότι η λύση της ανίσωση είναι: $x\in(-3,0)\cup(0,2)\cup(4,+\infty)$.



2. **Να λυθεί η ανίσωση:** $\dfrac{\mathbf{x^3+3x^2-x-3}}{\mathbf{x^2+3x-10}}\le \mathbf{0}$.

Λύση

Έχουμε

$$x^3+3x^2-x-3=x\left(x^2-1\right)+3\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)(x+3)=(x-1)(x+1)(x+3)$$

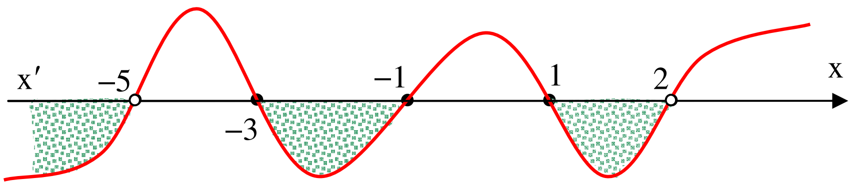
Το τριώνυμο $x^2+3x-10$ έχει $\Delta=9+40=49$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm 7}{2}\to\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-5\end{cases}$,

οπότε $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$. Επομένως

$$\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}\le 0\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x-2)(x+5)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)(x+5)\le 0$$

Τα σημεία μηδενισμού των διωνύνων που περιέχονται στους όρους του κλάσματος είναι $x_1=-5$, $x_2=-3$, $x_3=-1$, $x_4=1$ και $x_5=2$. Είναι όλα απλά σημεία και στα $x_1=-5$ και $x_5=2$ δεν ορίζετε η ανίσωση.



Κατασκευάζουμε την καμπύλη προσήμων και από αυτήν συμπεραίνουμε ότι η λύση της ανίσωσης είναι: $x\in(-\infty,-5)\cup[-3,-1]\cup[1,2)$.

3. **Να λυθεί η ανίσωση:** $\left(\mathbf{x^3-\dfrac{1}{x}}\right)^2+\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\le\dfrac{\left(\mathbf{x^4-2}\right)^2}{\mathbf{2}}+\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{x^2}}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{9}{2}\le\frac{\left(x^4-2\right)^2}{2}+\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^2-\frac{4}{x^2}\le\frac{\left(x^4-2\right)^2}{2}-\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2\le\frac{\left(x^4-2\right)^2-9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\left(x^3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right)\left(x^3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right)\le\frac{\left(x^4-2+3\right)\left(x^4-2-5\right)}{2}\Leftrightarrow$$

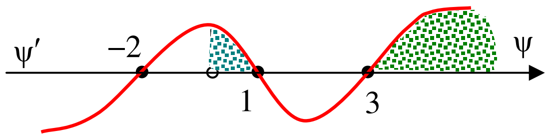
$$\frac{x^4+1}{x}\cdot\frac{x^4-3}{x}\le\frac{x^4+1}{2}\cdot\left(x^4-5\right)\Leftrightarrow\frac{x^4-3}{x^2}\le\frac{x^4-5}{2}\Leftrightarrow 2x^4-6\le x^6-5x^2\Leftrightarrow$$

$x^6-5x^2-2x^4+6\ge 0$ (1) $\left(\ x\ne 0,\ x^4+1>0 \text{ και } x^2>0\ \right)$.

Θέτουμε $x^2=\psi>0$ και η (1) γίνεται:

$\psi^3-2\psi^2-5\psi+6\ge 0\Leftrightarrow(\psi-1)(\psi+2)(\psi-3)\ge 0$

Με την καμπύλη προσήμων
Βρίσκουμε ότι:



$\psi\in[-2,1]\cup[3,+\infty)$ και επειδή $\psi>0$, έχουμε $\psi\in(0,1]\cup[3,+\infty)$ δηλαδή $x^2\in(0,1]\cup[3,+\infty)$. Επομένως

$0<x^2\le 1\Leftrightarrow 0<|x|\le 1\Leftrightarrow x\in[-1,0)\cup(0,1]$ ή

$x^2\ge 3\Leftrightarrow|x|\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(x\ge 3 \text{ ή } x\le-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$.

Τελικά η λύση της ανίσωσης είναι: $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup[-1,0)\cup(0,1]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$.

Δ. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

1. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^2\le 64 \\ \dfrac{x^2+x-4}{x}<1 \end{cases}$.

Λύση

Λύνουμε την πρώτη ανίσωση

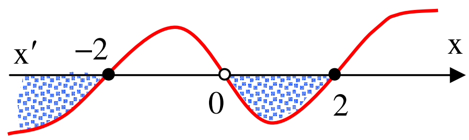
$x^2\le 64\Leftrightarrow x^2-64\le 0\Leftrightarrow(x-8)\cdot(x+8)\le 0\Leftrightarrow x\in[-8,8]$

Λύνουμε την δεύτερη ανίσωση

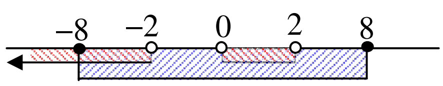
$$\frac{x^2+x-4}{x}<1\Leftrightarrow\frac{x^2+x-4}{x}-1<0\Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+x-4-x}{x}<0\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{x}<0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x}<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$$



Τελικά η λύση του συστήματος είναι:
$x\in[-8,-2)\cup(0,2)$



2. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει: $-3\le\dfrac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1}\le 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$-3 \le \frac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1} \le 2 \Leftrightarrow \left(-3 \le \frac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1} \text{ και } \frac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1} \le 2\right)$$

- $-3 \le \frac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1}+3 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+\alpha x-2+3x^2-3x+3}{x^2-x+1} \ge 0 \Leftrightarrow$
  $\frac{4x^2+(\alpha-3)x+1}{x^2-x+1} \ge 0 \Leftrightarrow 4x^2+(\alpha-3)x+1 \ge 0 \quad (1)$

  γιατί $x^2-x+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

  Το τριώνυμο $4x^2+(\alpha-3)x+1$ έχει $\Delta=(\alpha-3)^2-16=(\alpha-3-4)(\alpha-3+4)=$ $(\alpha-7)(\alpha+1)$, οπότε η ανισότητα (1) είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν $\Delta \le 0 \Leftrightarrow (\alpha-7)\cdot(\alpha+1) \le 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha \in [-1,7]}$

- $\frac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1}-2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+\alpha x-2-2x^2+2x-2}{x^2-x+1} \ge 0 \Leftrightarrow$
  $\frac{-x^2+(\alpha+2)x-4}{x^2-x+1} \ge 0 \Leftrightarrow -x^2+(\alpha+2)x-4 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-(\alpha+2)x+4 \le 0 \quad (2)$.

  Το τριώνυμο $x^2-(\alpha+2)x+4$ έχει $\Delta=(\alpha+2)^2-16=(\alpha+2-4)(\alpha+2+4)=$ $(\alpha-2)(\alpha+6)$, οπότε η ανισότητα (1) είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν $\Delta \le 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)\cdot(\alpha+6) \le 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha \in [-6,2]}$

  Άρα, όταν $\boldsymbol{\alpha \in [-1,2]}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $-3 \le \frac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1} \le 2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $x \le \frac{1}{x}$ είναι:

Α. $\{x \in \mathbb{R} : x \le -1 \text{ ή } 0 < x \le 1\}$ Β. $\{x \in \mathbb{R} : x \le -1 \text{ ή } 0 < x < 1\}$
Γ. $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ ή } 0 < x \le 1\}$ Δ. $\{x \in \mathbb{R} : x \le -1 \text{ ή } 0 \le x \le 1\}$
Ε. $\{x \in \mathbb{R} : x \le -1$.

2. Το άθροισμα των ακεραίων λύσεων της ανίσωσης $\frac{(x-3)^2(x+5)}{9-x} > 0$ είναι ίσο με

Α. 18 Β. 20 Γ. 23 Δ. 24 Ε. 30

3. Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι λύση της ανίσωσης

$$\frac{(x^2-6x+9)(1-x)}{x^2-1} \ge 0$$

Α. $A=(-\infty,-1)$ Β. $B=(-1,-1)\cup\{3\}$ Γ. $\Gamma=(-\infty,-1)\cup\{1,3\}$
Δ. $A=(-\infty,1)\cup\{3\}$ Ε. $E=(-\infty,-1)\cup\{3\}$.

4. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-6x+5\right)} \le 0$ είναι:

Α. 6 Β. 5 Γ. 4 Δ. 3 Ε. 2

5. Η μικρότερη ακεραία λύση της ανίσωσης $\dfrac{(2x-4)\left(-x^2+x-1\right)}{-x^2+4x} \ge 0$ είναι:

Α. -1 Β. 0 Γ. 1 Δ. 2 Ε. 3

6. Η λύση της ανίσωσης $\dfrac{(2+x)^{1990}(3-x)^{2010}}{(1+x)^{2011}} \le 0$ είναι:

Α. $(-\infty,-1)$ Β. $(-2,3)-\{-1\}$ Γ. $(-\infty,-1)-\{-2\}$

Δ. $(-\infty,-1)-\{-3\}$ Ε. $[-1,+\infty)-\{3\}$

7. Η λύση της ανίσωσης $\dfrac{(2-x)^{2001}(x+1)^{2012}}{(1+x)^{2004}} \le 0$ είναι:

Α. $(-\infty,-4]$ Β. $[-4,-1]$ Γ. $(-2,-1]$

Δ. $[2,+\infty)\cup\{-1\}$ Ε. $[2,+\infty)$

8. Αν $\dfrac{|x-2|-4}{|x-4|} \le 0$, το άθροισμα όλων των ακεραίων τιμών που μπορεί να πάρει ο x είναι

Α. 18 Β. 16 Γ. 14 Δ. 12 Ε. 10

9. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\mu x^2+2(\mu-2)x+\mu-3=0$, $\mu\in\mathbb{R}$ και ισχύει $x_1<2<x_2$ τότε το μ παίρνει τιμές στο σύνολο

Α. $\left(-\infty,\dfrac{11}{9}\right)$ Β. $\left(4,\dfrac{11}{9}\right)$ Γ. $\left(\dfrac{11}{9},+\infty\right)$ Δ. $\left(0,\dfrac{11}{9}\right)$ Ε. $(0,4)$

10. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $(\mu-1)x^2-(\mu+1)x-\mu+3=0$, $\mu\in\mathbb{R}$ και ισχύουν $|x_1|<x_2$ και $x_1<0<x_2$ τότε το μ παίρνει τιμές στο σύνολο

Α. $(-\infty,-1)$ Β. $(3,+\infty)$ Γ. $(1,3)$ Δ. $(-1,+\infty)$ Ε. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

11. Το σύνολο λύσεων του συστήματος $\begin{cases} 1-\dfrac{3}{x+1}<0 \\ x^3+3x\ge 0 \end{cases}$ είναι:

Α. $(0,1)$ Β. $(-1,0)$ Γ. $[0,2)$ Δ. $(-\infty,-1)$ Ε. $[2,+\infty)$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο των γινομένων:

(i) $P(x)=\left(4x^2-3x-1\right)\left(x^2-4x+4\right)\left(-x^2+x-1\right)$

(ii) $Q(x)=x\left(3-x\right)\left(x^2-x+2\right)\left(-x^2+5x\right)$.

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $x\left(x+1\right)^2\geq 0$ (ii) $\left(2-x\right)\left(3x+1\right)\left(2x-3\right)>0$

(iii) $\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x-5\right)>0$.

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\left(2x+1\right)\left(4-x\right)\left(3x-2\right)\left(x+7\right)\leq 0$

(ii) $\left(3x-2\right)\left(x-3\right)^3\left(x+1\right)^3\left(x+2\right)^4<0$.

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\left(x-1\right)\left(x^2-3x+8\right)<0$ (ii) $\left(2x-3\right)\left(2x^2-x+1\right)\left(x^2-5x+4\right)<0$.

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\left(x^2-4\right)\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2+4x+4\right)\geq 0$

(ii) $\left(2x^2-3x-5\right)\left(x^2-9\right)\left(x^2-3x\right)\leq 0$.

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $x^3-64x\geq 0$ (ii) $x^3+1\leq x^2+x$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις

(iii) $x^5-5x^4-6x^3\leq 0$ (iv) $x^4-1>x^3-x$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\dfrac{3x\left(x+2\right)}{x-3}>0$ (ii) $\dfrac{\left(x+3\right)\left(1-2x\right)}{x-5}\geq 0$ (iii) $\dfrac{x^2-4}{x+1}>0$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+2\right)^2}{x+1}\leq 0$ (ii) $\dfrac{x}{x^2-3x-4}>0$ (iii) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}<0$.

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\dfrac{x^2-9}{3x-x^2-24}\leq 0$ (ii) $\dfrac{\left(x+2\right)\left(x^2-2x+1\right)}{4+3x-x^2}>0$ (iii) $\dfrac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5}>0$.

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{3}{x-2}>1$ (iii) $\frac{1}{x-1}\le 2$.

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\frac{3x-2}{2x-3}<3$ (ii) $\frac{7x-4}{x+2}\le 1$ (iii) $\frac{3x+2}{x-2}\ge 1$.

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}\le 2$ (ii) $1+\frac{2}{x-1}<\frac{6}{x}$.

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{3}{x}+\frac{x}{3}\ge\frac{3(x+3)^2-x(9+x^2)}{3x^2+9x}$.

14. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3}\le 4$ (ii) $\frac{1}{3x-2-x^2}>\frac{3}{7x-4-3x^2}$.

Συστήματα ανισώσεων

15. Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων:

(i) $\begin{cases} 2x^2+2<5x \\ x^2\ge x \end{cases}$ (ii) $0<\frac{3x-1}{2x+5}\le 1$.

16. Να λύσετε το σύστημα ανισώσεων:

(i) $\begin{cases} \frac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\le 0 \\ \frac{1-x^2}{x^2+2x-8}\ge 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \frac{x+3}{x-2}<1 \\ \frac{2x+3}{3x-2}<2 \end{cases}$.

17. Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων:

(i) $1\le\frac{2-x}{x+1}\le 2$ (ii) $1<\frac{3x-1}{2x+1}<2$.

18. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $4x-2<x^2+1<4x+6$ (ii) $\frac{5x-7}{x-5}<4-\frac{x}{5-x}+\frac{3x}{x^2-25}<4$.

Ανισώσεις με απόλυτα

19. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2$ (ii) $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\le 1$.

20. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\left|5x^2-2x+1\right|<1$ (ii) $\left|6x^2-2x+1\right|\le 1$.

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right|<3$ (ii) $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\ge 1$.

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $x^2+2|x|-3\le 0$ (ii) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\ge 1$.

Γενικές

23. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2+6x+\alpha=0$ ικανοποιούν την συνθήκη $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\le 2$.

24. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η ανισότητα $\dfrac{x^2+\alpha x-1}{2x^2-2x+3}\le 1$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

25. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το σύστημα ανισοτήτων $-3\le\dfrac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1}\le 2$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

26. Να λύσετε την εξίσωση $(\beta-2)x^2+(\beta-5)x-2\beta-2=0$, $\beta\ne 2$ και να βρείτε τις τιμές του $\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες αρνητικές.

27. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{x+\alpha-\alpha^2}$$

είναι μικρότερο από $\dfrac{\alpha^3}{10}$.