

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ**

**Κατ'...ευθείαν!**

**Θέμα 1**

- Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ( $\epsilon$ ) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον  $x'x$
2. Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_1, y_2)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν.
3. Υπάρχουν δύο ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  με συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1, \lambda_2$  αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως  
 $\lambda_1 = \lambda_2$  και  $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ .
4. Οι ευθείες με εξισώσεις  $y = \frac{1}{|\lambda|} x$  και  $y = -\lambda x$  είναι κάθετες για κάθε  $\lambda \neq 0$ .
5. Οι ευθείες  $y = -\frac{\kappa}{3} x + 1$  και  $y = -\lambda x + 2$  είναι παράλληλες. Τότε ισχύει  $\kappa = 3\lambda$ .
6. Οι ευθείες  $y = 2x + 1$  και  $4x - 2y + 5 = 0$  είναι παράλληλες.
7. Οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων  $x'x, y'y$  έχουν εξισώσεις  $y = x$  και  $y = -x$  και τέμνονται κάθετα.
8. Οι ευθείες  $y = 2$  και  $y = 2x$  είναι παράλληλες.
9. Οι ευθείες  $5x + y = 1$  και  $x - 5y - 1 = 0$  είναι κάθετες.
10. Τα σημεία  $A(\kappa, \alpha), B(\lambda, \alpha), \Gamma(\mu, \alpha)$  είναι συνευθειακά.
11. Τα σημεία  $A(\alpha + \beta, \gamma), B(\beta + \gamma, \alpha), \Gamma(\gamma + \alpha, \beta)$  είναι συνευθειακά αν  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ .
12. Από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ .
13. Δίνονται τα σημεία  $A(-3, -1), B(2, 2), \Gamma(-3, 4)$  και  $\Delta(3, -6)$ . Η ευθεία  $AB$  είναι κάθετη προς την ευθεία  $\Gamma\Delta$ .
14. Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $(1, 1)$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία ίση με  $135^\circ$  είναι  $x + y = 0$ .
15. Η ευθεία  $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$  με  $\alpha, \beta \neq 0$  τέμνει τους άξονες στα σημεία  $A(\alpha, 0)$  και  $B(0, \beta)$ .

**Θέμα 2**

Εστω η ευθεία  $\varepsilon: 8x-4y= 11$  και τα σημεία  $A(\lambda, 1)$ ,  $B(2, \lambda)$ , που είναι συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας σημείο της  $\varepsilon$ . Να βρεθούν:

- Ο  $\lambda \in \mathbb{R}$
- Η οξεία γωνία  $\varphi$  που σχηματίζει η ευθεία  $\varepsilon$  με την  $AB$ .

Απάντηση:

**Θέμα 3**

Θεωρούμε τα σημεία  $A(-2t+6, 0)$  και  $B(0, 4t-2)$ . Όταν το  $t$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ , να βρείτε:

- Την ελάχιστη απόσταση  $(AB)$
- Το γ.τ. του μέσου  $M$  του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

Απάντηση:

**Θέμα 4**

**Ελέγξτε την ορθότητα των παρακάτω:**

1. Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής  $x=x_0$ .
2. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$  με τον άξονα  $x'x$  είναι  $120^\circ$ .
3. Η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  είναι πάντα εξίσωση ευθείας.
4. Αν  $A \neq B$ , τότε η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει πάντοτε ευθεία.
5. Στην ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει  $B=0$ .
6. Το διάνυσμα  $\vec{\eta} = (-2, 1)$  είναι κάθετο στην ευθεία  $x + y + 2 = 0$ .
7. Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .
8. Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\eta} = (A, -B)$ .
9. Δύο ευθείες παράλληλες στα διανύσματα  $\vec{\delta}_1 = (A, B)$  και  $\vec{\delta}_2 = (-B, A)$  αντίστοιχα είναι μεταξύ τους κάθετες.
10. Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (A, B)$  με  $B \neq 0$  έχει εξίσωση της μορφής:  $Ax + By + \Gamma = 0$ .
11. Η απόσταση του σημείου  $M_0(x_0, y_0)$  από την ευθεία  $(\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0$  είναι  $d$   

$$(M_0, \epsilon) = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
12. Η απόσταση  $d(M_0, \epsilon)$  του σημείου  $M_0(x_0, y_0)$  από την ευθεία  $(\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0$  επαληθεύει την ισότητα  $|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \epsilon) \sqrt{A^2 + B^2}$
13. Το εμβαδόν ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ίσο με την ορίζουσα  $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$ .
14. Όλα τα διανύσματα με κοινό φορέα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.
15. Η ευθεία  $y = k^2x + 1$  σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα  $x'x$  για κάθε  $k \neq 0$ .

*«Μην ανησυχείς για το τι σκέπτονται οι άλλοι για εσένα. Είναι απασχολημένοι με το να ανησυχούν τι σκέπτεσαι εσύ για αυτούς.»*

**Θέμα 5**

Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon: 2y = x$  και σημείο  $A$  του ημιάξονα  $Ox$ . Από το  $A$  φέρνουμε την ευθεία  $\varepsilon_1 // y'y$  και την ευθεία  $\varepsilon_2 // \varepsilon$ . Η  $\varepsilon_1$  τέμνει την  $\varepsilon$  σ' ένα σημείο  $B$ . Από το  $B$  φέρνουμε την ευθεία  $\varepsilon_3 \perp \varepsilon$ , η οποία τέμνει την  $\varepsilon_2$  στο  $M$ . Να βρείτε το γ.τ. των σημείων  $M$  όταν το  $A$  διαγράφει τον  $Ox$ .

Απάντηση:

**Θέμα 6**

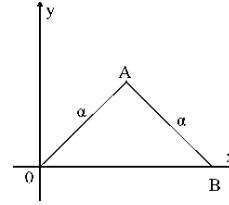
Μια τυχαία ευθεία  $\varepsilon: \beta x + \alpha y = \alpha\beta$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$  και  $4\alpha + 5\beta = 20$ , τέμνει τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  στα σημεία  $K$  και  $L$  αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι το μέσο  $M$  του τμήματος  $KL$  κινείται σε σταθερή ευθεία

Απάντηση:

**Θέμα 7**

**Επιλέξτε την ορθή απάντηση:**

1. Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας ΟΑ  
 ΟΑ  
 είναι  $y = \sqrt{3}x$ . Η γωνία ΟΑΒ ισούται με  
 Α. 30° Β. 60° Γ. 45° Δ. 90°  
 Ε. 135°



2. Ο συντελ. διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία A(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>) και B(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>) ορίζεται πάντα όταν:
- Α.  $y_1 \neq y_2$  Β.  $x_1 = x_2$  και  $y_1 \neq y_2$  Γ.  $x_1 \neq -x_2$  και  $y_1 \neq y_2$  Δ.  $y_1 = y_2$  και  $x_1 = x_2$  Ε.  $x_1 \neq x_2$
3. Η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει πάντα ευθεία με  
 Α.  $A = 0$  και  $B = 0$  Β.  $A = 0$  ή  $\Gamma \neq 0$  Γ.  $A^2 + B^2 \geq 0$  Δ.  $|A| + |B| > 0$   
 Ε.  $|A| + |B| < 0$
4. Το διάνυσμα  $\vec{\delta}(-2,3)$  είναι κάθετο στην ευθεία  
 Α.  $2x - 3y + 1 = 0$  Β.  $2x + 3y + 1 = 0$  Γ.  $3x + 2y + 1 = 0$  Δ.  $3x - 2y + 1 = 0$  Ε.  $3x - 2y - 1 = 0$
5. Έστω (ε):  $Ax + By + \Gamma = 0$  (με  $A \neq 0$  και  $B \neq 0$ ), τότε:  
 Α. το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, A)$  είναι κάθετο στην (ε)  
 Β. το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (A, -B)$  είναι παράλληλο στην (ε)  
 Γ. το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (-B, A)$  είναι παράλληλο στην (ε)  
 Δ. το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (A, B)$  είναι παράλληλο στην (ε)  
 Ε. το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (-A, B)$  είναι κάθετο στην (ε)

“Τα Μαθηματικά είναι ποίηση και όχι πίεση”

**Θέμα 8**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{d}_1 = (a, \beta)$  και  $\vec{d}_2 = (\gamma, \delta)$ , τα οποία δεν είναι συγγραμμικά.

- Ναδειχθεί ότι  $a\delta \neq \beta\gamma$
- Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x, y)$ , ώστε τα σημεία  $K(a, \beta)$ ,  $L(\gamma, \delta)$  και  $N(ax+\gamma, \beta x+\delta y)$  να είναι συνευθειακά.

Απάντηση:

**Θέμα 9**

**Ελέγξτε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων:**

1. Η ευθεία  $x + \lambda(x-y) - \lambda = 0$  τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $xOy$  για κάθε τιμή του αριθμού  $\lambda$ .
2. Οι ευθείες  $\varepsilon_1: y = 2x+1$ ,  $\varepsilon_2: y = 2x-1$ ,  $\varepsilon_3: x+2y+1=0$  και  $\varepsilon_4: x+2y+2=0$  τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
3. Η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon': x+3=0$  και περνά από το σημείο  $(3,2)$ , είναι  $y=3$ .
4. Οι ευθείες  $2x-3y=11$  και  $4y+3x+9=0$  έχουν κοινό σημείο το  $(-1,3)$ .
5. Η ευθεία  $y=\lambda x+3$  έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα  $x'x$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$
6. Αν οι ευθείες  $(\mu+1)x-y=0$  και  $3x+y-7=0$  είναι παράλληλες, τότε  $\mu=2$ .
7. Η εξίσωση  $xy = x$  παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου.
8. Το σημείο  $A(\eta\mu\theta, 0)$  με  $\theta = \frac{\pi}{7}$  ανήκει στην ευθεία  $2x+ky=3$ .
9. Η απόσταση των παράλληλων ευθειών  $y=x$  και  $y=x+1$  είναι 1.

**Θέμα 10**

**Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:**

1. Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία A (3, 5) και B (-1, 8). Η προβολή του AB στον άξονα  $x'x$  έχει μήκος  
Α. 3   Β. 5   Γ. -1   Δ. 8   Ε. 4
2. Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  αμβλεία γωνία είναι  
Α.  $y = |\lambda|x - 2$    Β.  $y = 2$    Γ.  $y = 3x + 2$    Δ.  $y = |\lambda|x + \beta$  με  $\lambda < 0$    Ε. η κάθετη στην  $2x - 3y + 2 = 0$
3. Αν η ευθεία ( $\varepsilon$ ) τέμνει τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  στα A( $\alpha, 0$ ), B(0,  $\beta$ ) αντίστοιχα με  $\alpha = 2\beta$ . Τότε η ( $\varepsilon$ ) σχηματίζει  
Α. γωνία  $60^\circ$  με τον  $x'x$    Β. γωνία  $90^\circ$  με τον  $x'x$    Γ. γωνία οξεία με τον  $x'x$    Δ. γωνία αμβλεία με τον  $x'x$   
Ε. κλίση ίση με  $\frac{1}{2}$
4. Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση  $y^2 = x^2$  παριστάνει  
Α. μια ευθεία κάθετη στον  $x'x$    Β. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας  $xOy$   
Γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας  $yOx'$    Δ. τις διχοτόμους των γωνιών  $xOy$  και  $yOx'$    Ε. μια ευθεία κάθετη στον  $y'y$
5. Αν A(1,3) και B(5,3), το συμμετρικό του μέσου του AB ως προς τον άξονα  $x'x$  είναι το  
Α. (2,3)   Β. (2,-3)   Γ. (3,-3)   Δ. (-3,3)   Ε. (-3, -3)

*"Οι μεγάλοι άνθρωποι μιλούν για ιδέες. Οι μεσαίοι άνθρωποι μιλούν για γεγονότα. Οι μικροί άνθρωποι μιλούν για τους άλλους." Πλάτωνας*

**Θέμα 11**

Δίνεται η εξίσωση  $\lambda^2 x - \lambda y + 2 = 0$  (1)

- α) Να βρείτε για ποια  $\lambda \in \mathbb{R}$  παριστάνει ευθεία γραμμή  
β) Για τα  $\lambda$  που βρήκατε να δείξετε ότι οι ευθείες της οικογένειας δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο  
γ) Να δείξετε ότι από το τυχαίο σημείο  $M(\alpha, \beta)$  του επιπέδου διέρχονται δύο το πολύ ευθείες της οικογένειας. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των  $\alpha, \beta$  ώστε να διέρχεται από το  $M$  μία μόνο ευθεία;

Απάντηση:



**Θέμα 12**

Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - \lambda^2 - 2\lambda - \gamma = 0$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $\gamma$  πραγματική σταθερά.

- α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.
- β.** Εάν  $\gamma = -1$ , να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- γ.** Εάν  $\gamma \neq -1$ , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση

Απάντηση:

**Θέμα 13**

Μία ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τις ευθείες  $\varepsilon_1: y=0$ ,  $\varepsilon_2: y=x$ ,  $\varepsilon_3: y=4x$ ,  $\varepsilon_4: x=0$ , στα σημεία  $\Lambda$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $M$  αντίστοιχα. Αν  $\alpha\beta > 0$  και  $\overline{\Lambda A} = \overline{B M}$  να υπολογισθεί ο συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  της  $\varepsilon$ . (Στην γενική περίπτωση αν  $\varepsilon_2: y=\alpha x$  και  $\varepsilon_3: y=\beta x$  τότε  $\lambda = -\sqrt{\alpha\beta}$ )

Απάντηση:

**Θέμα 14**

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου  $M(x,y)$  για το οποίο είναι

$$\overline{OM} = \frac{\alpha(1+t^2)-2t}{1+t^2} \vec{i} + \frac{\beta t}{1+t^2} \vec{j}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } O \text{ η αρχή των αξόνων}$$

Απάντηση:

**Θέμα 15**

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon: x+\lambda y=\lambda+3$  και  $\zeta: y=\lambda x-3\lambda-1, \lambda \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι:

α) καθεμιά από τις  $\varepsilon, \zeta$  διέρχεται από σταθερό σημείο (ανεξάρτητο του  $\lambda$ )

β)  $\varepsilon \perp \zeta$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

γ) το σύστημα  $\begin{cases} x+\lambda y=\lambda+3 \\ y=\lambda x-3\lambda-1 \end{cases}$  έχει μοναδική λύση και οι ευθείες  $\varepsilon, \zeta$  έχουν μοναδικό

κοινό σημείο  $M$

δ) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του  $M$  όταν το  $\lambda$  μεταβάλλεται

Απάντηση: