

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**  
**1ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : Τέσσερις (5)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:  
 Έστω  $f$  συνάρτηση συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha).$$

**Μονάδες 10**

- B. (i)** Ποιά λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- (ii)** Ποιές είναι οι θέσεις τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης  $f$  σε διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 3**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.)**  $\left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right)' = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx.$

**Μονάδες 2**

- β.)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε είναι κυρτή ή κοίλη στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

γ.) Αν ισχύει  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η ισότητα  $f'(x) = 0$  ισχύει για άπειρες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η  $f$  δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 2**

δ.) Αν η γραφική παράσταση  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$  έχει στο  $+\infty$  ασύμπτωτη την ευθεία  $\varepsilon : \psi = \lambda x + \beta$ , τότε η  $C_f$  δεν τέμνει αυτή την ασύμπτωτη

**Μονάδες 2**

ε.) Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, w$  για τους οποίους ισχύει:

$$z_1^2 = 3 + i, \quad z_2^2 = 1 + 3i, \quad w = \frac{z_1}{z_2}$$

A. Να αποδείξετε ότι  $w$  δεν είναι πραγματικός

**Μονάδες 5**

B. Βρείτε το μέτρο του  $w$

**Μονάδες 5**

Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{w-1}{w+1}$  είναι φανταστικός

**Μονάδες 5**

Δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $u$ ,

για τους οποίους ισχύει :  $|u - z_1^2| = |u + z_2^2|$

**Μονάδες 5**

**Ε.** Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό  $u$  ισχύει:

$$|u + w| + |u - w| \geq 2$$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f(\mathbb{R}) \subseteq [-1, 1]$ . Δίνεται επίσης η συνάρτηση  $h$  με

$h(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $h(0) = 2 + \theta$ , όπου  $\theta$  σταθερός θετικός.

**A.** Να δείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (-\alpha, \alpha)$  με  $\alpha \geq 2$ , τέτοια ώστε:

$$|f'(\xi_1)| \leq 1 \text{ και } |f'(\xi_2)| \leq 1$$

**Μονάδες 8**

**B.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$  τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) + f''(x_0) = 0$$

**Μονάδες 8**

**Γ.** Δίνεται συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, με

$$g'(x) = \frac{x^2}{1 + f^2(x)}, x \in \mathbb{R}.$$

**1.** Να δείξετε ότι  $g(1) \geq \frac{1}{3} + g(-1)$ , όπου  $f(x)$  η συνάρτηση των προηγούμενων ερωτημάτων και στη συνέχεια

**Μονάδες 3**

2. να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $\frac{g'(x) + g'(-x)}{e^x + 1}$ , τον άξονα  $xx'$  και τις  $x = 1$ ,  $x = -1$  είναι μεγαλύτερο ή ίσον  $\frac{1}{3}$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x > 0$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $f(x) = \int_1^x f(t)dt - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(tx)}{tx - \ln(xt)^2} \frac{tx - 2}{t} dt + e$

A. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της

**Μονάδες 7**

B. Αν είναι  $f(x) = e^x(x - 2\ln x)$ , να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της και να βρεθεί το σύνολο τιμών της

**Μονάδες 6**

Γ. Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(x - 2\ln x) = \alpha^2 + 1 - x$ , έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**Μονάδες 7**

Δ. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.  
Καμμία άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**