**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
**"Ο ΘΑΛΗΣ"**
**19 Νοεμβρίου 2011**

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

## Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

**Λύση**

$$A=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

**Πρόβλημα 2**

Αν ο $\nu$ είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$B=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

**Λύση**

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός $\nu$ είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του $\nu$ είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$ ,έχουμε: $B=\frac{2}{2-\frac{1}{5}}:\frac{2-\frac{2}{2}}{9}=\frac{2}{\frac{9}{5}}:\frac{2-1}{9}=\frac{10}{9}:\frac{1}{9}=\frac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$ , έχουμε: $B=\frac{2}{5-\frac{1}{5}}:\frac{5-\frac{5}{2}}{9}=\frac{2}{\frac{24}{5}}:\frac{\frac{5}{2}}{9}=\frac{10}{24}:\frac{5}{18}=\frac{10}{24}\cdot\frac{18}{5}=\frac{180}{120}=\frac{3}{2}$.

**Πρόβλημα 3**

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

**Λύση**

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega$, $\beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7 .$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21$, $\beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}=20^0$.

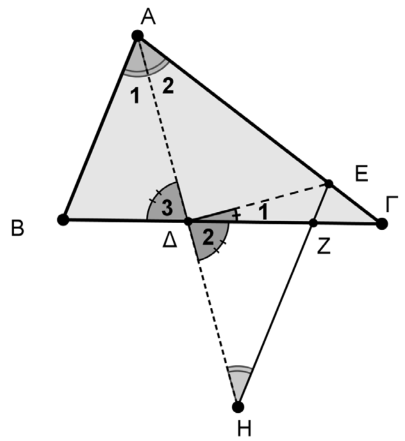
**Λύση**

**1.** Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{H}}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\mathrm{H}}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $\mathrm{E\Delta}\perp\mathrm{AH}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$




Σχήμα 1

**2.** Επειδή $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\hat{\Delta}_3 .$$

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{20^\mathrm{o}}{2}=10^\mathrm{o}.$$

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left( \frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

**Λύση**

Έχουμε:

$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2$.

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left( \frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left( \frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left( \frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2}$$

$$= \left( 2 \cdot 10^{6-4} \right)^{-2} = \left( 2 \cdot 10^2 \right)^{-2} = \frac{1}{\left( 2 \cdot 10^2 \right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400}$$

**Πρόβλημα 2**

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

**Λύση**

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \leq 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \leq 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \leq 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \leq 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \leq 8x \Leftrightarrow 3 \leq 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

**Πρόβλημα 3**

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxy$ δίνεται ότι η ευθεία $(\varepsilon)$ με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου $\lambda, \mu$ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία $(\delta)$ με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

**(α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\lambda$ και $\mu$.

**(β)** Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon)$ και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

**Λύση**

**(α)** Επειδή είναι $(\varepsilon)\,||\,(\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$ γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon)$, οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon):\ y=2x+4.$$

**(β)** Επειδή ισχύουν $2\cdot(-4)+4=-4$ και $2\cdot(-1)+4=2$, τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$, οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας $(\varepsilon)$. Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

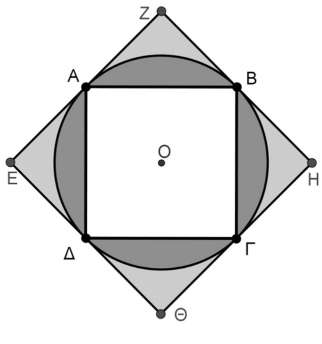
$$\mathrm{MK}=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{(-4+1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

**Πρόβλημα 4**

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.




**(α)** Να βρείτε το άθροισμα $\Sigma_1$ των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

**(β)** Να βρείτε το άθροισμα $\Sigma_2$ των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

**(γ)** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3{,}1415$).

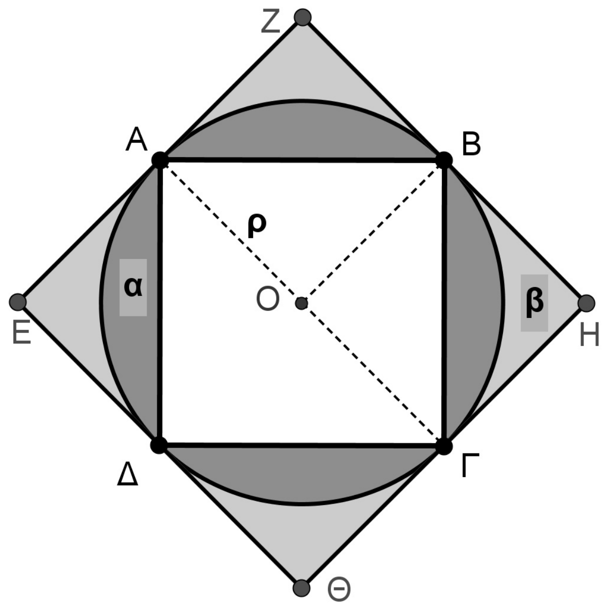
**Λύση**

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp \mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα $\Sigma_1$, θα είναι:

$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$




Σχήμα 2

**2.** Επειδή είναι $\mathrm{OA} \perp \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{O\Gamma} \perp \mathrm{H\Theta}$, έπεται ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $\mathrm{ZH} = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

**3.** Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428...., \text{ που ισχύει.}$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**1.** Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\begin{Bmatrix} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2} \end{Bmatrix}$$

**Λύση**

Έχουμε

$$(x-10)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1,\ \beta=-7,$ $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο $x$ πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x \Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

**2.** Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

**Λύση**

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$

$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2}=\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+\left(1+x\right)^3}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)}{x^2+1}=\frac{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}\left(x\right)=\mathrm{B}\left(x\right)-\Gamma\left(x\right)=x^2+x+1-\left(x+1\right)=x^2.$$

**3.** **(α)** Αν $\kappa$ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa\left(x+2\right)-\frac{3\left(\kappa x-1\right)}{4}.$$

**(β)** Για ποιες τιμές του ακέραιου $\kappa$ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

**Λύση**

**(α)** Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa\left(x+2\right)-3\left(\kappa x-1\right)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$

$$\Leftrightarrow\left(\kappa+1\right)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

**1.** Αν $\kappa=-1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-5$ και είναι αδύνατη.

**2.** Αν $\kappa\in\mathbb{Z}-\{-1\}$, δηλαδή, αν ο $\kappa$ είναι ακέραιος διαφορετικός από το $-1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{8\kappa+3}{\kappa+1}$.

**(β)** Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x=\frac{8\kappa+3}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\left(\kappa+1\right)-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$

$$x=8-\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\kappa+1\in\{-1,1,-5,5\}\Leftrightarrow\kappa\in\{-2,0,-6,4\}.$$

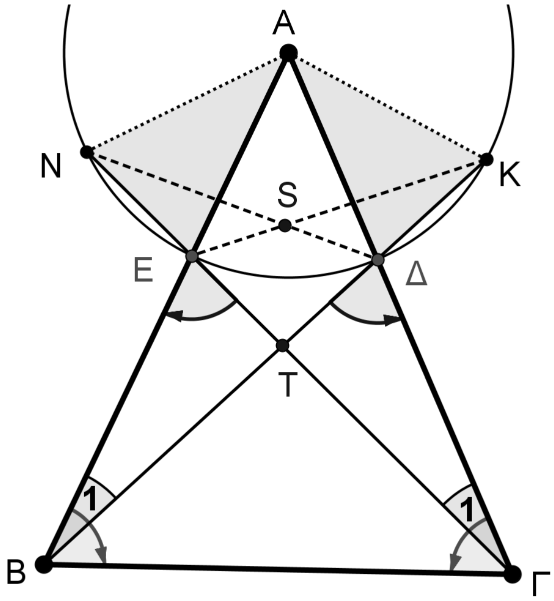
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το $\kappa$ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή $\mathrm{A}$ και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές $\mathrm{AB}$ και $\mathrm{A\Gamma}$ στα σημεία $\mathrm{E}$ και $\Delta$, αντίστοιχα. Οι ευθείες $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία $\mathrm{K},\mathrm{N}$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{T}$ είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ και $\mathrm{S}$ το σημείο τομής των $\Delta\mathrm{N}$, $\mathrm{EK}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}$, $\mathrm{S}$ και $\mathrm{T}$ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

**Λύση**

Τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.




Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΒ$ και $ΑΕΓ$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$ και κατά συνέπεια:

$$Β\hat{Τ}Γ = Γ\hat{Τ}Β. \qquad (1)$$

- $Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Ε}Γ$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$Β\hat{Ε}Γ = Β\hat{Δ}Γ \qquad (2)$$

- $$ΔΒ = ΔΓ. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $Β\hat{Τ}Γ = Γ\hat{Τ}Β$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $ΒΤΓ$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο $Τ$ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $ΒΓ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΒΤΓ$ έχουμε: $ΤΒ = ΤΓ$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $ΤΕ = ΤΔ$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $Β\hat{Ε}Γ = Β\hat{Δ}Γ$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $ΑΔΚ$ και $ΑΕΝ$. Άρα $ΔΚ = ΕΝ$ και επειδή $ΤΕ = ΤΔ$, καταλήγουμε $ΤΚ = ΤΝ$.

Από τις ισότητες $ΤΕ = ΤΔ$ και $ΤΚ = ΤΝ$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων $ΕΤΚ$ και $ΔΤΝ$.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $SEN = SΔΚ$ και στη συνέχεια η ισότητα $SAE = SAK$, οπότε το σημείο $S$ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$.

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

**(α)** Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}.$$

**(β)** Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}.$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

**Λύση**

**(α)** Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:

$$\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}=\frac{(x+2)\left(2x^2-3x+1\right)+x-4}{x^2-2}$$

$$=\frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2}=\frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$$

$$=\frac{2x\left(x^2-2\right)+x^2-2}{x^2-2}=\frac{\left(x^2-2\right)(2x+1)}{x^2-2}=2x+1.$$

**(β)** Για $x=2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την Α, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{A}=\mathrm{K}(2010)=2\cdot 2010+1=4021.$$

**Πρόβλημα 2**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το $x$, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

**Λύση**

Για $a=b$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{x-a}=\dfrac{1}{c^2}\Leftrightarrow x=a+2c^2$.

Έστω $a\neq b$. Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b)=c^2(x-a+x-b),\ \text{με } x\neq a \text{ και } x\neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2-\left(a+b+2c^2\right)x+ab+(a+b)c^2=0,\ \text{με } x\neq a \text{ και } x\neq b \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta=\left(a+b+2c^2\right)^2-4ab-4(a+b)c^2=(a+b)^2-4ab+4c^4=(a-b)^2+4c^4>0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2}=\frac{a+b+2c^2\pm\sqrt{(a-b)^2+4c^4}}{2}. \qquad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα $a$ και $b$ δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x=a$ η εξίσωση γίνεται: $(a-a)(x-b)=c^2(a-a+x-b)\Leftrightarrow 0=c^2(a-b)$, που είναι άτοπο, αφού είναι $c \neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a \neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x = b$. Επομένως, για $a \neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες (2).

**Πρόβλημα 3**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2,\ z = y^3 + 2y - 2,\ x = z^3 + 2z - 2.$$

**Λύση**

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y - z = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + 2\right) \qquad (1)$$

$$z - x = (y - z)\left(y^2 + yz + z^2 + 2\right) \qquad (2)$$

Επειδή είναι $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$ και ομοίως προκύπτει ότι $y^2 + yz + z^2 + 2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} + 2 > 0$, αν υποθέσουμε ότι είναι $x > y$, τότε από την (1) λαμβάνουμε ότι $y > z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z > x$.

Έτσι έχουμε $x > y > z > x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x < y$. Επομένως έχουμε $x = y,$ οπότε θα είναι και $y = z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στα σημεία $\Delta$, $\mathrm{E}$ και $\mathrm{Z}$ αντίστοιχα. Από το σημείο $\mathrm{Z}$, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο $\mathrm{M}$. Από το σημείο $\mathrm{E}$, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{AB}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο $\mathrm{N}$. Να αποδείξετε ότι:

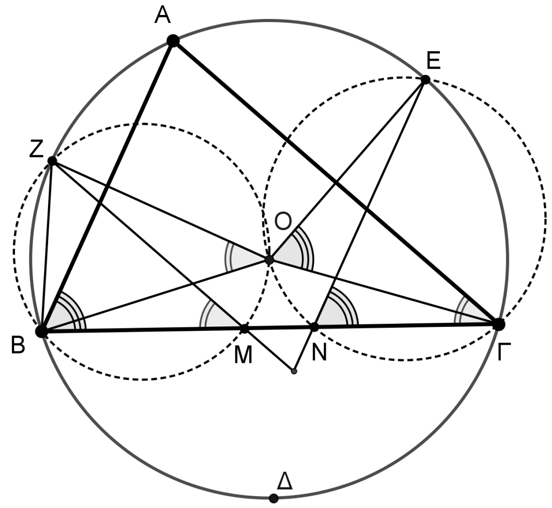
**α)** Τα τετράπλευρα $\mathrm{BMOZ}$ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω $(\mathrm{c}_1)$ και $(\mathrm{c}_2)$, αντίστοιχα.

**β)** Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω $\mathrm{K}$) των κύκλων $(\mathrm{c}_1)$ και $(\mathrm{c}_2)$ ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο $\Delta$ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου $\mathrm{I}$ το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

**Λύση**

**α)** Εφόσον η $\mathrm{ZM}$ είναι παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, θα ισχύει: $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{Z\hat{O}B}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ και βαίνει στο τόξο $\mathrm{ZB}$ (που είναι το μισό του τόξου $\mathrm{AB}$). Άρα $\mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο $\mathrm{BMOZ}$ είναι εγγράψιμο.




Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $E\hat{N}\Gamma = E\hat{O}\Gamma = \hat{B}$ και ότι το τετράπλευρο $\Gamma NOE$ είναι εγγράψιμο.

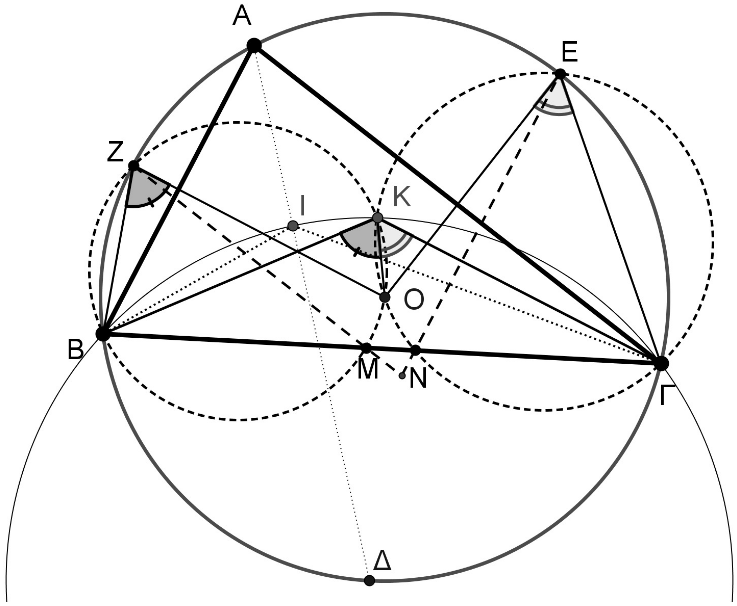
**β)** Επειδή το σημείο $I$ είναι το έκκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{I}B = \Delta\hat{B}I = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} \text{ και } \Delta\hat{I}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}I = \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta B = \Delta I = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία $B, I, K, \Gamma$ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$B\hat{K}\Gamma = \hat{A} + \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} = B\hat{I}\Gamma.$$




Σχήμα 5

Το τρίγωνο ΟΒΖ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OB} = \mathrm{OZ} = R)$, με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} = 90^{\circ} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OE} = R)$, με $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}$. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = 90^{o} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} + \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} + \Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = 90^{o} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^{o} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$

$$= 180^{o} - \left(90^{\circ} - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 90^{\circ} + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$

## Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**1.** Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση
$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

**Λύση (1ος τρόπος)**

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα $x^2+3x+2$ και $x^2+x-2$ έχουν παράγοντα το $x+2$, οπότε η εξίσωση γίνεται:
$$\left(x+2\right)^4\left[\left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^4=0 \text{ ή } \left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4+12x^2-14=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4+6x^2-7=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2=1 \text{ ή } x^2=-7 \text{ (αδύνατη)}$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

**2ος τρόπος**

Αν θέσουμε $a=x^2+3x+2,\ b=x^2+x-2$, τότε $a-b=2x+4$ και η εξίσωση γίνεται:
$$a^4+b^4=\left(a-b\right)^4 \Leftrightarrow a^4+b^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$
$$\Leftrightarrow -ab\left(2a^2-3ab+2b^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } 2a^2-3ab+2b^2=0$$
$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0,$$
αφού η εξίσωση $2a^2-3ab+2b^2=0,$ αν $ab\neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση
$$2u^2-3u+2=0,\ u=\frac{a}{b},$$
η οποία δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:
$$a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \text{ ή } x^2+x-2=0 \text{ ή } x^2+3x+2=x^2+x-2=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=-2 \text{ (διπλή)}$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)}$$

**Πρόβλημα 2**

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R},$, αν το σύστημα
$$\left.\begin{cases}\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda\\ 2x-y=-\lambda\end{cases}\right\},\qquad (\Sigma)$$
έχει λύση στο $\mathbb{R}$, δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

**Λύση**

Έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda \\ 2x-y=-\lambda \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\left(x^2+\left(2x+\lambda\right)^2\right)+2x+2x+\lambda=\lambda \\ y=2x+\lambda \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5\alpha x^2+4\left(\alpha\lambda+1\right)x+\alpha\lambda^2=0 & (1) \\ y=2x+\lambda & (2) \end{Bmatrix}$$

Αν ήταν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta=16\left(\alpha\lambda+1\right)^2-20\alpha^2\lambda^2=4\left(-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4\right)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda$, έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4 \geq 0. \qquad (3)$$

Όμως , το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4$ έχει διακρίνουσα $\Delta'=80\alpha^2>0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1<0<\lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2=-\dfrac{4}{\alpha^2}<0$ ).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4<0$, για $\lambda<\lambda_1$ ή $\lambda>\lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha=0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x=0$, οπότε προκύπτει ότι $y=\lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $\left(x,y\right)=\left(0,\lambda\right)$. Άρα είναι $\alpha=0$.

**Πρόβλημα 3**

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των $a_0,\omega$ και $n$ τον γενικό όρο $a_n$ και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο $n$ για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\leq 8\cdot 10^3$.

**Λύση**

**1.** Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1=\omega,\ d_n=d_1+\left(n-1\right)\omega=n\omega, n=2,3,.....$$

οπότε θα είναι:

$$d_1+d_2+...+d_n=\left(a_1-a_0\right)+\left(a_2-a_1\right)+...+\left(a_n-a_{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \omega+2\omega+...+n\omega=a_n-a_0 \Leftrightarrow a_n=a_0+\left(1+2+...+n\right)\omega$$

$$\Leftrightarrow a_n=a_0+\frac{n\left(n+1\right)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα $S_{n+1}$ έχουμε:

$$S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n=(n+1)a_0+\left(\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\left(1^2+1\right)+\left(2^2+2\right)+\ldots+\left(n^2+n\right)\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\omega+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\omega.$$

**2.** Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, τότε έχουμε $\omega=6$ και

$$a_n=1+3n(n+1),\ S_{n+1}=n+1+n(n+1)(n+2)=(n+1)\left[1+n(n+2)\right]=(n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$a_n>10^3 \text{ και } S_{n+1}\le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow a_n=1+3n(n+1)>10^3,\ S_{n+1}=(n+1)^3\le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow$$

$$n(n+1)>333,\ n+1\le 2\cdot 10 \Leftrightarrow n>18,\ n\le 19 \Leftrightarrow n=18 \text{ ή } n=19.$$

αφού είναι $17\cdot 18=306,\ 18\cdot 19=342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος $n$ είναι ο 18.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Τ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Τα σημεία Α, Ι, Λ, Μ και Α, Ι, Κ, Ν είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) $(c_1)$ και $(c_2)$ αντίστοιχα, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

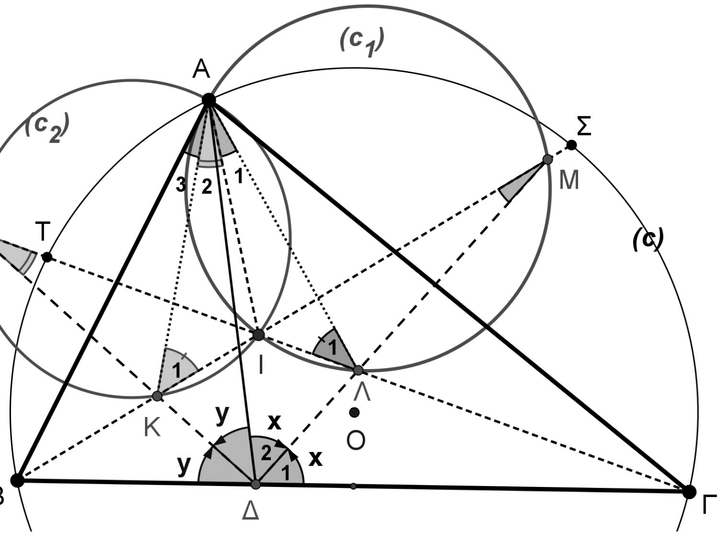
**β)** Αν η ΑΔ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, που αντιστοιχεί στη κορυφή Α τότε οι κύκλοι $(c_1)$ και $(c_2)$ είναι ίσοι μεταξύ τους.

**Λύση**

**α)** Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Κ, Λ είναι τα έκκεντρα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ αντίστοιχα.

Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}}_1=\mathrm{I}\hat{\mathrm{A}}\Gamma-\Lambda\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma}{2}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{180^0-2\hat{x}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-90^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\hat{x}=\hat{x}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$




Σχήμα 6

Από το τρίγωνο $\text{M}\Delta\text{B}$ έχουμε: $\hat{x} = \hat{\text{M}} + \dfrac{\hat{\text{B}}}{2} \Leftrightarrow \hat{\text{M}} = \hat{x} - \dfrac{\hat{\text{B}}}{2}$, δηλαδή $\hat{\text{A}}_1 = \hat{\text{M}} = \hat{x} - \dfrac{\hat{\text{B}}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $\text{AI}\Lambda\text{M}$ είναι εγγράψιμο.

Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\text{A}}_2 = \text{I}\hat{\text{A}}\text{B} - \text{K}\hat{\text{A}}\text{B} = \frac{\hat{\text{A}}}{2} - \frac{\Delta\hat{\text{A}}\text{B}}{2} = \frac{\hat{\text{A}}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{y} - \hat{\text{B}}}{2} = \frac{\hat{\text{A}}}{2} - 90^o + \frac{\hat{\text{B}}}{2} + \hat{y} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $\text{N}\Delta\Gamma$ έχουμε: $\hat{y} = \hat{\text{N}} + \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{\text{N}} = \hat{y} - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$, δηλαδή $\hat{\text{A}}_2 = \hat{\text{N}} = \hat{y} - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $\text{AIKN}$ είναι εγγράψιμο.

**β)** Εφόσον $\text{I}$ είναι το έκκεντρο του τριγώνου $\text{AB}\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\text{A}\hat{\text{I}}\text{B} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{\text{A}} + \hat{\text{B}}}{2} = 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } \text{A}\hat{\text{I}}\Gamma = \hat{\text{B}} + \frac{\hat{\text{A}} + \hat{\Gamma}}{2} = 90^o + \frac{\hat{\text{B}}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $\text{AIK}$ έχουμε:

$$\hat{\text{K}}_1 = 180^o - \text{A}\hat{\text{I}}\text{B} - \hat{\text{A}}_2 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\text{N}} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{y} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \hat{y}.$$

Από το τρίγωνο $\text{AI}\Lambda$ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1 = 180^o - \text{A}\hat{\text{I}}\Gamma - \hat{\text{A}}_1 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{\text{B}}}{2} - \hat{\text{M}} = 90^o - \frac{\hat{\text{B}}}{2} - \hat{x} + \frac{\hat{\text{B}}}{2} = 90^o - \hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\text{A}\Delta \perp \text{B}\Gamma$ τότε $\hat{x} = \hat{y} = 45^o$, οπότε $\hat{\text{K}}_1 = \hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι $(c_1)$ και $(c_2)$ είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{\text{K}}_1, \hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή $\text{AI}$).

**Παρατηρήσεις**

**α)** Τα κέντρα των κύκλων $(c_1)$ και $(c_2)$ βρίσκονται επάνω στην $\Sigma\text{T}$.

**β)** Το σημείο $\text{A}$ είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου $\Delta\text{KI}\Lambda\text{MN}$.