Θέματα Μαθηματικών διαγωνισμών Ε.Μ.Ε
Θέματα διαγωνισμού "ΘΑΛΗΣ" Γ΄ Γυμνασίου

1998 – 1999

1. Ενα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαιρείται σε 4 μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με δύο ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Τα τρία απ' αυτά τα τέσσερα ορθογώνια έχουν εμβαδά 10, 18 και 25 cm^2 ανάστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετάρτου ορθογωνίου.

2. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$\frac{333334 \cdot 666663333331+333327}{333333^2}$$

είναι ακέραιος. Να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

3. Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε έναν κόκκινο, δύο μπλέ και τρείς πράσινους βώλους σε έξι τρύπες που βρίσκονται σε ευθεία γραμμή και ισαπέχουν;

O O O O O O

4. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γραφεί ο αριθμός 105 ως άθροισμα τουλάχιστον δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων αριθμών;

1999- 2000

1. Στο διπλανό σχήμα είναι:

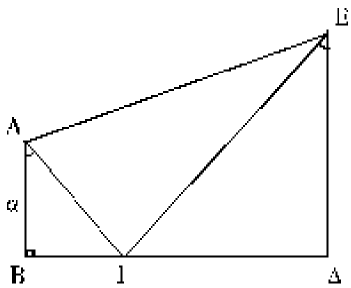
i. ΑΒ // ΕΔ

ii. $\hat{B} = 90°$

iii. $B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{E}\Delta = 45°$

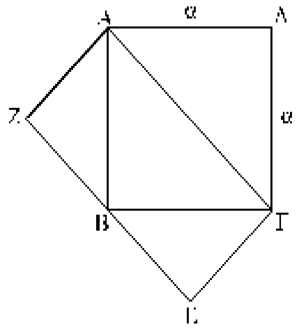
iv. ΔΕ = 2 · ΑΒ, ΑΒ = α.

Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΕ.



2. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, ενώ το τετράπλευρο ΑΖΕΓ είναι ορθογώνιο.

Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\dfrac{(AB\Gamma\Delta)}{(AZE\Gamma)}$.



3. Αν είναι:

$$A = \frac{(-2)^{\nu}}{2\nu^2},\ \ B = \frac{(-2)^{\nu}}{2\nu^2 + 3},$$

όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί ποιος από τους αριθμούς Α, Β είναι μεγαλύτερος.

4. Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς 1,2,3, ... , 1999 δε διαιρούνται ούτε με το 5 ούτε με το 7.

2000 – 2001

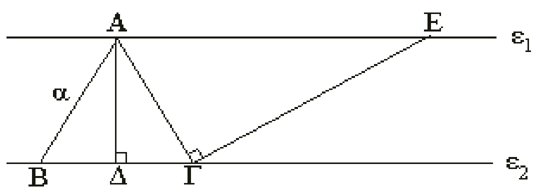
1. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A = (-5)^2 - (-2)^{-3} : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^{1000}$$

$$B = [(-5)^2 - (-2)^3 - 1] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{35}{24}\right].$$

Να βρείτε τους αριθμούς Α, Β και να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{A}{B}$, $\frac{25B}{23A}$.

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται:



(α) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
(β) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α.
(γ) ΓΕ ⊥ ΑΓ και ΑΔ ⊥ ΒΓ.
(δ) ΑΕ = 2α

Να βρείτε: (i) το λόγο $\frac{\Gamma E}{A\Delta}$

(ii) το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΔΓΕ.

3. Ο θετικός ακέραιος x είναι άρτιος και όταν διαιρείται με το 7 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρεθεί ο αριθμός x, αν είναι μεταξύ των αριθμών 512 και 521.

4. Σε μία Βαλκανική συνάντηση Νέων συμμετείχαν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον χώρα είχε στην αποστολή της 12 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλου.

2001 – 2002

1. Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις

$$A = [(-1)^{2\nu} + (-1)^{2\nu+1}]\cdot(3^{12} + 2^{10}),$$
$$B = (-2)^{-3} : (-2)^{-1} + \frac{(-3)^{-2} - (-2)^{-4}}{(-4)^{-2}},$$

όταν ο ν είναι θετικός ακέραιος.

2. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές ΑΒ=χ, ΑΓ=χ+2 και ΒΓ=10. Αν ισχύει ότι

$$(\chi + 2)^2 - \chi^2 = 28,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

3. Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ.

(I) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ίσα.

(II) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΓΔΕ, ΑΔΕ και ΑΓΕ.

4. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8\,.$$

Για ποιες τιμές των α, β λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α;

2002-2003

ΘΕΜΑ 1ο

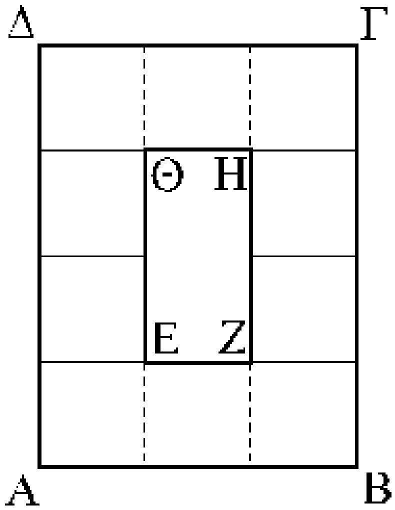
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$K=\alpha^3-(1+\alpha)^{-2}+4\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}-2004\right)^{2004}\right]^0,\ \text{αν είναι}\ \alpha=-\frac{3}{2}$$

και $\beta=3$.

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν 10 ίσα τετράγωνα μεταξύ των ορθογωνίων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ. Να υπολογίσετε την πλευρά των τετραγώνων, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμα των εμβαδών τους ισούται αριθμητικά με το άθροισμα των περιμέτρων των ορθογωνίων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.



ΘΕΜΑ 3ο

Σε μία διοργάνωση σκακιού μέσω διαδικτύου συμμετείχαν 1119 αγόρια και κορίτσια.

Το πρώτο κορίτσι έπαιξε με 20 αγόρια, το δεύτερο κορίτσι έπαιξε με 21 αγόρια, το τρίτο κορίτσι έπαιξε με 22 αγόρια κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο κορίτσι που έπαιξε με όλα τα αγόρια.

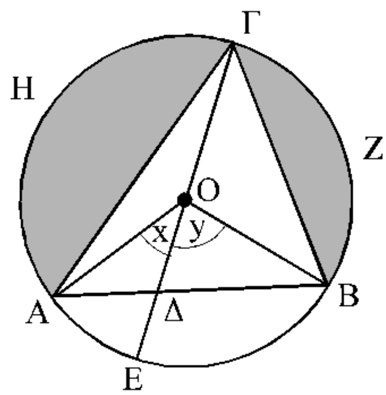
Να βρείτε πόσα ήταν τα αγόρια και πόσα ήταν τα κορίτσια.

ΘΕΜΑ 4ο

Στο διπλανό σχήμα, ο κύκλος κέντρου Ο έχει ακτίνα R, η ΓΕ είναι διάμετρος, η γωνία $\Delta\hat{O}B=y$ είναι τριπλάσια της γωνίας $A\hat{O}\Delta=x$ και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΒ είναι ίσο με $\frac{1}{3}\pi R^2$.

(i) Να βρείτε τις γωνίες x και y.

(ii) Να βρείτε το λόγο $\dfrac{E_{\kappa.\tau.}(B Z \Gamma)}{E_{\kappa.\tau.}(A H \Gamma)}$ των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων ΒΖΓ και ΑΗΓ.



2003 – 2004

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2003 - \frac{6 - 10x + 2(4x - y - 3)}{3(x - z) + 3(y + z)} - 2(x + \frac{1}{3}) - 2y,$$

αν είναι $x + y = 2003$.

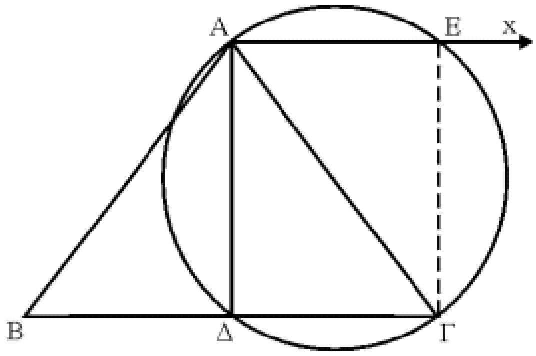
2. Οι ακέραιοι x και y είναι ανάλογοι προς τον αριθμητή και τον παρανομαστή, αντίστοιχα, του κλάσματος που προκύπτει από τη μετατροπή σε κλασματική μορφή του δεκαδικού αριθμού **α** = **4,333…** . Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$B = \frac{6x - 5y}{6x + 5y} - \frac{21}{31}.$$

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Με διάμετρο την πλευρά ΑΓ γράφουμε κύκλο που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Φέρουμε ακόμα την $Ax \perp A\Delta$ που τέμνει τον κύκλο στο Ε.

(ι) Να αποδείξετε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

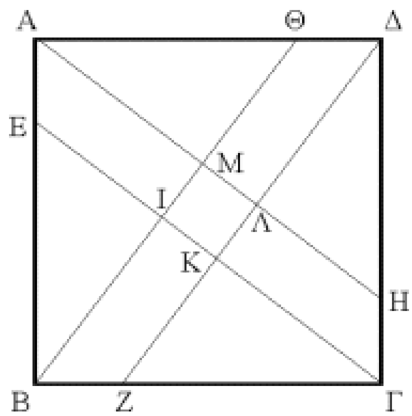
(ιι) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ προς το εμβαδόν του τετραλεύρου ΑΔΓΕ.



4. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 4α και ΑΕ=ΒΖ=ΓΗ=ΔΘ= α .
Το τετράπλευρο ΙΚΛΜ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε:

(ι) την ΑΗ ως συνάρτηση του α και

(ιι) το εμβαδόν του τετραγώνου ΙΚΛΜ ως συνάρτηση του α .



2004-2005

1. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \dfrac{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - 3^2 + x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}$, $B = \dfrac{\left[(-2)^3 + (-1)^3\right]}{9} + \dfrac{x}{2}$

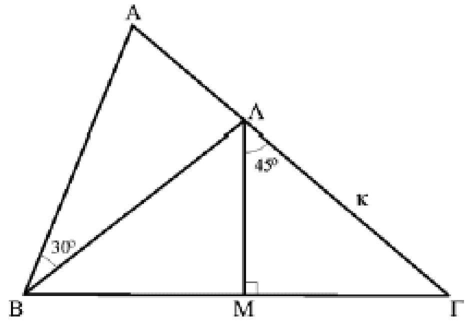
Αν είναι $A = 6B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x. ***Μονάδες 5***

2. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ είναι μέσον της πλευράς ΒΓ και η μεσοκάθετη της ΒΓ τέμνει τη ΑΓ στο Λ.
Επίσης δίνονται:

$\widehat{M\Lambda\Gamma} = 45^\circ$, $\widehat{AB\Lambda} = 30^\circ$, $\Lambda\Gamma = \kappa$.

Να βρείτε :

(α) τις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. ***(Μονάδες 2)***

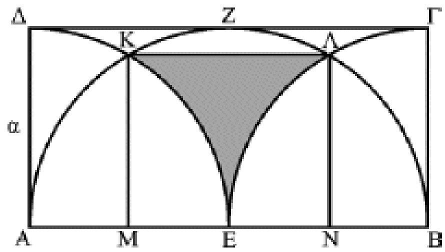


(β) τις πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ συναρτήσει του κ. ***(Μονάδες 2)***
(γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. ***(Μονάδες 1)***

3. Μία εταιρεία χρησιμοποίησε 20 εργάτες επί 6 μήνες, εργαζόμενους 8 ώρες το 24ωρο, για να τελειώσει το μισό ενός έργου. Επειδή το υπόλοιπο του έργου πρέπει να τελειώσει σε 2 μήνες η εταιρεία αποφάσισε να προσλάβει και άλλους εργάτες, της ιδίας απόδοσης ανά ώρα, οι οποίοι θα δουλεύουν δεύτερη βάρδια επί 10 ώρες το 24ωρο, ενώ οι υπάρχοντες εργάτες θα δουλεύουν όπως και πριν. Πόσους επιπλέον εργάτες πρέπει να προσλάβει η εταιρεία ώστε να τελειώσει το έργο ακριβώς σε δύο μήνες;

Μονάδες 5

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΑΔ=2α, τα μέσα Ε και Ζ των ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, και οι τρεις κύκλοι με κέντρα Α, Ε και Β και ακτίνας α, που τέμνονται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ στα σημεία Κ και Λ. Να βρείτε :
(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΕ **(Μονάδες 1)**
(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΝΜ, όπου Μ μέσον της ΑΕ και Ν μέσον της ΕΒ **(Μονάδες 1)**
(γ) το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου γραμμοσκιασμένου τριγώνου ΕΚΛ. **(Μονάδες3)**



2005-2006

1. Έστω ότι α = β + 2005. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$K = -3[2(\alpha + 2\beta) - 2(3\beta - 2\alpha) - 4\beta] + 19(\alpha - \beta)$$

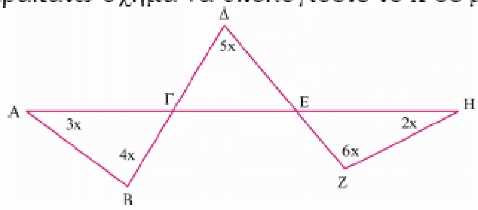
2. Να βρεθεί το μικρότερο θετικό πολλαπλάσιο του 2005, το οποίο διαιρούμενο δια του 2001 αφήνει υπόλοιπο 12.

3. Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ρητός αριθμός του οποίου το 33% καθώς και το 15% είναι ακέραιος.

4. Είναι δυνατόν να υπάρχουν στο εσωτερικό ενός κυρτού τετραπλεύρου δύο διαφορετικά σημεία από το καθένα από τα οποία όλες οι πλευρές του τετραπλεύρου να φαίνονται από ίσες γωνίες; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2006-2007

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



2. Αν $\alpha+2\beta+\frac{\gamma}{2}=0$ και αβγ=10, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\alpha^2(\alpha+\frac{\gamma}{2})^2\cdot(\alpha+2\beta)^2$$

3. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός 27p + 1 είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α,β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2}\alpha\beta^{-1}+\frac{10}{3}\alpha^{-1}\beta=3.$$

2007 – 2008

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A=-\left[(-2)^8:(-4)^2+(-4)^2\right]:(-2)^4,\quad B=-(x-3)-3(y-4)-\left[x(y-2)-y(x+3)\right].$$

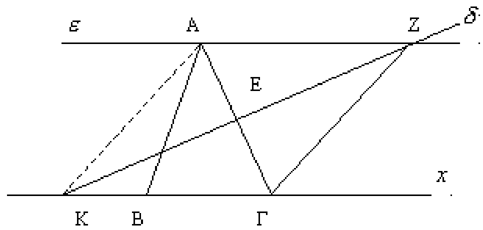
Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $A>B$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma=40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Z\hat{\Gamma}x$,

(β) Να αποδείξετε ότι ΚΑ = ΑΖ.



Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma=\{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $A=\overline{aaabb}$, όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

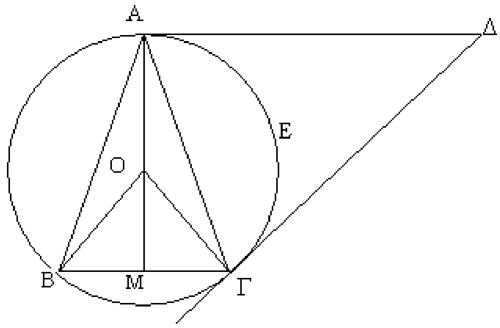
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma=30^\circ$. Η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και η ΓΔ είναι κάθετη προς την ΟΓ.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α.

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.



2008 – 2009

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2009}\right]^0}$, $B=\dfrac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\dfrac{x}{2}$.

Αν είναι $A=B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x. *Μονάδες 5*

2. Το σημείο $A(-\lambda+2, 4\lambda-1)$), όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

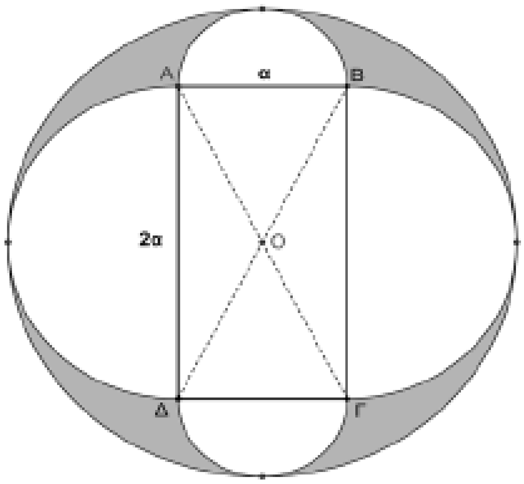
(α) ο θετικός ακέραιος λ,

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ και

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ, όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AB=\alpha$, $A\Delta=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. *Μονάδες 5*



4. Αν ισχύει $\dfrac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=2003\cdot(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$

Μονάδες 5