

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**26<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα**  
**"Ο Αρχιμήδης"**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009**

**ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**Θέματα μεγάλων τάξεων**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου  $n$  για τις οποίες ο αριθμός

$$A = \sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

**Λύση**

Αρκεί να υπάρχουν  $a, b \in \mathbb{N}^*$  με  $(a, b) = 1$  τέτοιοι ώστε:

$$\frac{9n-1}{n+7} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$n = \frac{7a^2 + b^2}{9b^2 - a^2} = \frac{7(a^2 - 9b^2) + 64b^2}{9b^2 - a^2} = -7 + \frac{64b^2}{9b^2 - a^2} \quad (2)$$

Επειδή είναι  $(a, b) = 1$ , έπεται ότι  $(a^2, b^2) = 1$  και  $(9b^2 - a^2, b^2) = 1$ , οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι ο αριθμός  $n$  είναι ακέραιος, αν, και μόνον αν, ο ακέραιος  $9b^2 - a^2$  είναι διαιρέτης του 64.

Επειδή οι αριθμοί  $a, b$  και  $n$  είναι θετικοί ακέραιοι, προκύπτει ότι  $9b^2 - a^2 \geq 8$ , οπότε θα είναι:

$$9b^2 - a^2 = (3b+a)(3b-a) \in \{8, 16, 32, 64\}. \quad (3)$$

Επειδή οι παράγοντες  $3b+a, 3b-a$  έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 6 και διαφορά πολλαπλάσιο του 2 και είναι  $3b+a > 3b-a$ , από τη σχέση (3) οι μόνες δυνατές περιπτώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$(3b+a, 3b-a) = (4, 2) \text{ ή } (3b+a, 3b-a) = (8, 4) \text{ ή } (3b+a, 3b-a) = (16, 2)$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (1, 1) \text{ ή } (a, b) = (2, 2) \text{ ή } (a, b) = (7, 3).$$

Το ζευγάρι  $(a, b) = (2, 2)$  απορρίπτεται, γιατί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των  $a, b$  είναι 2, οπότε προκύπτουν τελικά οι τιμές  $n = 1$  ή  $n = 11$ .

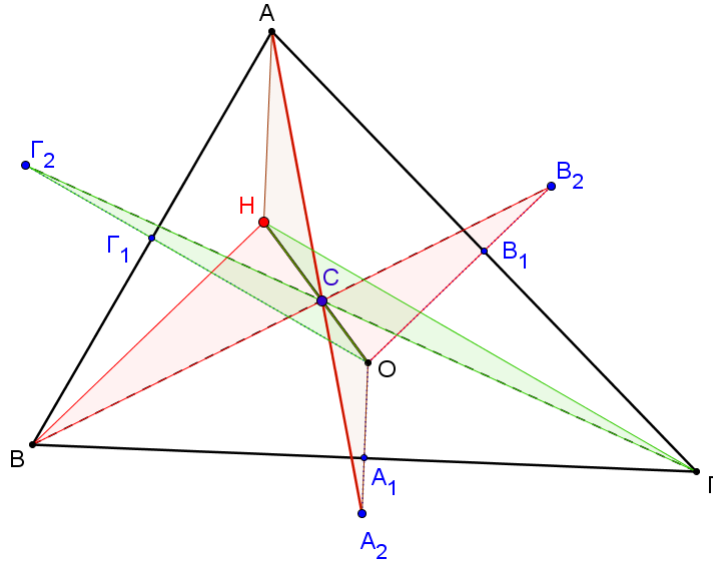
**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με περίκεντρο  $O$  και  $A_1, B_1, \Gamma_1$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία  $A_2, B_2, \Gamma_2$  έτσι ώστε:  $\overrightarrow{OA_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA_1}$ ,  $\overrightarrow{OB_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB_1}$  και  $\overrightarrow{O\Gamma_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{O\Gamma_1}$  με  $\lambda > 0$ . Αποδείξτε ότι οι ευθείες  $AA_2, BB_2, \Gamma\Gamma_2$  συντρέχουν.

### Λύση

Έστω  $H$  το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Τότε θα ισχύει  $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OA_1}$ . Δεδομένου όμως ότι  $\overline{OA_2} = \lambda \cdot \overline{OA_1}$ , καταλήγουμε στη σχέση:  $\overline{AH} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overline{OA_2}$ .

Αν τώρα  $C$  είναι το σημείο τομής των  $AA_2$  και  $OH$  (από την ομοιότητα των τριγώνων  $CHA$  και  $COA_2$ ), έχουμε:  $\overline{HC} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overline{CO}$ . Δηλαδή η  $AA_2$  περνάει από το σημείο  $C$  που χωρίζει το  $OH$  σε λόγο  $\frac{2}{\lambda}$ .



Ομοίως, θα ισχύει  $\overline{BH} = 2 \cdot \overline{OB_1}$ . Δεδομένου όμως ότι  $\overline{OB_2} = \lambda \cdot \overline{OB_1}$ , καταλήγουμε

$$\overline{BH} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overline{OB_2}.$$

Αν τώρα  $C'$  είναι το σημείο τομής των  $BB_2$  και  $OH$  (από την ομοιότητα των τριγώνων  $C'HA$  και  $C'OB_2$ ), έχουμε:  $\overline{HC'} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overline{C'O}$ . Δηλαδή η  $BB_2$  περνάει από το σημείο  $C'$  που χωρίζει το  $OH$  σε λόγο  $\frac{2}{\lambda}$ .

Αν τώρα  $C''$  είναι το σημείο τομής των  $BB_2$  και  $OH$ , τότε με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η  $\Gamma\Gamma_2$  περνάει από το σημείο  $C''$  που χωρίζει το  $OH$  σε λόγο  $\frac{2}{\lambda}$ .

Τα σημεία όμως  $C, C', C''$  ταυτίζονται. Άρα οι ευθείες  $AA_2, BB_2, \Gamma\Gamma_2$  συντρέχουν.

### Παρατηρήσεις

- (1) Αν  $\lambda = 1$  τότε το σημείο  $C$  ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- (2) Αν  $\lambda = 2$  τότε το σημείο  $C$  ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Στη περίπτωση αυτή τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A_2B_2\Gamma_2$  είναι ίσα και έχουν κοινό κύκλο του Euler.
- (3) Σε κάθε περίπτωση τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A_2B_2\Gamma_2$  είναι όμοια με τις πλευρές τους παράλληλες. Το ένα τρίγωνο είναι “εικόνα” του άλλου μέσα από ομοιοθεσίες, οπότε μπορεί να προκύψει λύση και μέσω ομοιοθεσιών.

(4) Λύσεις του προβλήματος μπορούν να δοθούν με χρήση Αναλυτικής Γεωμετρίας ή μιγαδικών αριθμών.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί  $x, y$  και  $z$  έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των  $x, y$  και  $z$  αληθεύει η ισότητα;

#### Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε στην πρώτη φάση τη γνωστή ανισότητα  $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ , η οποία ισχύει για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Η ισότητα ισχύει για  $\alpha = \beta$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz &= \frac{1}{2}(2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2xyz) \\ &= \frac{1}{2}(2xy \cdot xy + 2yz \cdot yz + 2zx \cdot zx + 2xyz) \\ &\leq \frac{1}{2}[xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + yz(y^2 + z^2) + 2xyz] \quad (1) \\ &= \frac{1}{2}[(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) - xyz^2 - yzx^2 - zxy^2 + 2xyz] \\ &= \frac{1}{2}[(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) - xyz(x + y + z - 2)] \\ &= \frac{1}{2}[(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2)], \quad (\text{αφού } x + y + z = 2). \end{aligned}$$

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq \frac{1}{2}[(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2)], \quad (2)$$

ενώ η ισότητα ισχύει, όπως προκύπτει από την (1), όταν :

$$x = y = z \text{ ή } x = y, z = 0 \text{ ή } y = z, x = 0 \text{ ή } z = x, y = 0,$$

οπότε, αφού είναι  $x + y + z = 2$ , η ισότητα αληθεύει όταν:

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ ή } (1, 1, 0) \text{ ή } (1, 0, 1) \text{ ή } (0, 1, 1). \quad (3)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ανισότητα  $\alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$ ,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , θεωρώντας  $\alpha = 2xy + 2yz + 2zx$ ,  $\beta = x^2 + y^2 + z^2$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2)] &= \frac{1}{4}[(2xy + 2yz + 2zx)(x^2 + y^2 + z^2)] \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}(x + y + z)^4 = 1. \quad (4) \end{aligned}$$

Από τις (2) και (4) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Η ισότητα στην ανισότητα (4) ισχύει όταν:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2,$$

η οποία συναληθεύει με τις ισότητες (3) για  $(x, y, z) = (1, 1, 0)$  ή  $(1, 0, 1)$  ή  $(0, 1, 1)$ .

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$  των οποίων οι εικόνες  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $r > 0$ . Αν  $w$  είναι μία λύση της εξίσωσης  $z^2 + z + 1 = 0$  και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 w^2 + z_3 w + z_5 = 0 \quad (\text{I}),$$

$$z_2 w^2 + z_4 w + z_6 = 0 \quad (\text{II})$$

να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο  $A_1 A_3 A_5$  είναι ισόπλευρο,

$$(\beta) |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|.$$

#### Λύση

(α) Εφόσον ο μιγαδικός  $w$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $z^2 + z + 1 = 0$ , θα ισχύει  $w^2 + w + 1 = 0$ . Πολλαπλασιάζοντας τη τελευταία εξίσωση με  $w$ , έχουμε:

$$w^3 + w^2 + w = 0 \Leftrightarrow w^3 + \underbrace{w^2 + w + 1}_0 = 0 \Leftrightarrow w^3 = -1.$$

Από τη τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι  $|w| = 1$ .

Αντικαθιστώντας στη σχέση (I)  $w^2 = -w - 1$ , έχουμε:

$$z_1(-1 - w) + z_3 w + z_5 = 0 \Leftrightarrow -z_1 - z_1 w + z_3 w + z_5 = 0 \Leftrightarrow (z_3 - z_1)w = z_1 - z_5.$$

Άρα

$$|(z_3 - z_1)w| = |z_1 - z_5| \Leftrightarrow |z_3 - z_1||w| = |z_1 - z_5| \Leftrightarrow |z_3 - z_1| = |z_1 - z_5| \quad (\text{A}).$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (I)  $w = -w^2 - 1$ , έχουμε:

$$z_1 w^2 + z_3(-w^2 - 1) + z_5 = 0 \Leftrightarrow z_1 w^2 - z_3 w^2 - z_3 + z_5 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_3)w^2 = z_3 - z_5.$$

Άρα έχουμε

$$|(z_1 - z_3)w^2| = |z_3 - z_5| \Leftrightarrow |z_1 - z_3||w^2| = |z_3 - z_5| \Leftrightarrow |z_1 - z_3| = |z_3 - z_5| \quad (\text{B}).$$

Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε τις ισότητες:

$$|z_1 - z_3| = |z_3 - z_5| = |z_5 - z_1|,$$

δηλαδή το τρίγωνο  $A_1 A_3 A_5$  είναι ισόπλευρο.

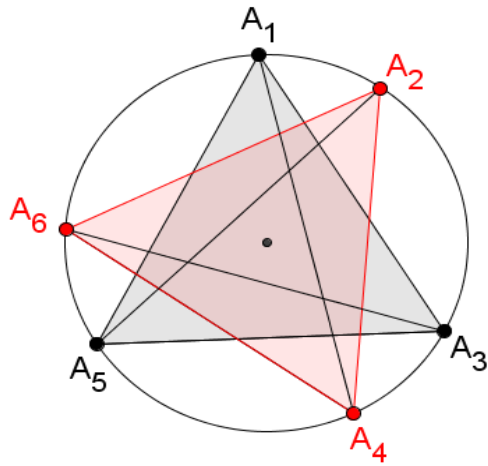
(β) Με όμοιο τρόπο (χρησιμοποιώντας τη σχέση (II)) αποδεικνύουμε ότι και το τρίγωνο  $A_2 A_4 A_6$  είναι ισόπλευρο.

Από γνωστή πρόταση της γεωμετρίας έχουμε ότι  $A_1 A_2 + A_1 A_6 = A_1 A_4$ , οπότε χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_1 - z_2| + |z_6 - z_1| = |z_1 - z_4|. \quad (1)$$

Ομοίως, από την ισότητα  $A_3 A_2 + A_3 A_4 = A_3 A_6$  χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| = |z_3 - z_6|. \quad (2)$$



Ομοίως, από την ισότητα  $A_5A_4 + A_5A_6 = A_5A_2$  χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| = |z_2 - z_5|. \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) και (3) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τις ισότητες

$$|z_1 - z_4| = |z_3 - z_6| = |z_2 - z_5|$$

λαμβάνουμε:

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|.$$