

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

➤ **Να αποδείξετε ότι**  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  (σελίδα 167)

**Απόδειξη:**

Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in R.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \cdots + \alpha_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \cdots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \cdots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

➤ **Να αποδείξετε ότι**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ , με  $Q(x_0) \neq 0$  (σελίδα 167)

**Απόδειξη:**

Έστω η ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , όπου  $P(x)$ ,  $Q(x)$  πολυώνυμα του  $x$  και  $x_0 \in R$  με  $Q(x_0) \neq 0$ . Τότε,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον} \quad Q(x_0) \neq 0$$

➤ ΘΕΩΡΗΜΑ - ενδιάμεσων τιμών (σελίδα 194)

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ .

Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

**Απόδειξη:**

Ας υποθέσουμε ότι  $f(a) < f(\beta)$ . Τότε θα ισχύει  $f(a) < \eta < f(\beta)$  (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \eta$ ,  $x \in [a, \beta]$ , παρατηρούμε ότι:

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και

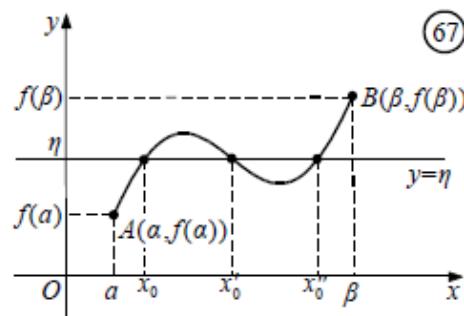
- $g(a)g(\beta) < 0$ ,

αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \quad \text{και}$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$ , οπότε  $f(x_0) = \eta$ . ■



➤ ΘΕΩΡΗΜΑ (σελίδα 217)

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Απόδειξη:**

Για  $x \neq x_0$  έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Επομένως,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

➤ Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων (σελίδες 223-224)

- Έστω η σταθερή συνάρτηση  $f(x) = c$ ,  $c \in R$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R$  και ισχύει  $f'(x) = 0$ , δηλαδή

$$(c)' = 0$$

*Απόδειξη:*

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $R$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή  $(c)' = 0$ . ■

- Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R$  και ισχύει  $f'(x) = 1$ , δηλαδή

$$(x)' = 1$$

*Απόδειξη:*

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $R$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή  $(x)' = 1$ . ■

- Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^\nu$ ,  $\nu \in N - \{0, 1\}$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R$  και ισχύει  $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$ , δηλαδή

$$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$$

*Απόδειξη:*

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $R$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή  $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ . ■

- Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*Απόδειξη:*

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $(0, +\infty)$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η  $f(x) = \sqrt{x}$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. ■

➤ Παράγωγος αθροίσματος (σελίδα 229)

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1**

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

**Απόδειξη:**

Για  $x \neq x_0$ , ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacksquare$$

➤ Παράγωγος γινομένου τριών συναρτήσεων (σελίδα 230 κάτω μέρος)

Αν οι συναρτήσεις  $f, g, h$  είναι παραγωγίσιμες τότε ισχύει:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' &= [(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x) \cdot g(x))' \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \\ &= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \end{aligned}$$

➤ Να αποδείξετε ότι  $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$ , με  $v \in N^*$  και  $x \in R^*$  (σελίδες 231-232)

**Απόδειξη:**

- Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^{-v}$ ,  $v \in N^*$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R^*$  και ισχύει  $f'(x) = -vx^{-v-1}$ , δηλαδή

$$(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$$

Πράγματι, για κάθε  $x \in R^*$  έχουμε:

$$(x^{-v})' = \left( \frac{1}{x^v} \right)' = \frac{(1)'x^v - (x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}. \quad \blacksquare$$

➤ Να αποδείξετε ότι  $(e^{\varphi x})' = \frac{1}{\sigma v^2 x}$ , με  $\sigma v x \neq 0$  (σελίδα 232)

*Απόδειξη:*

- Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^{\varphi x}$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R_1 = R - \{x | \sigma v x = 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{\sigma v^2 x}$ , δηλαδή

$$(e^{\varphi x})' = \frac{1}{\sigma v^2 x}$$

Πράγματι, για κάθε  $x \in R_1$  έχουμε:

$$(e^{\varphi x})' = \left( \frac{\eta \mu x}{\sigma v x} \right)' = \frac{(\eta \mu x)' \sigma v x - \eta \mu x (\sigma v x)'}{\sigma v^2 x} = \frac{\sigma v x \sigma v x + \eta \mu \eta \mu x}{\sigma v^2 x} = \frac{\sigma v^2 x + \eta \mu^2 x}{\sigma v^2 x} = \frac{1}{\sigma v^2 x} \blacksquare$$

➤ Να αποδείξετε ότι  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , αν  $\alpha \in R - Z$  και  $x \in (0, +\infty)$  (σελίδα 234)

*Απόδειξη:*

- Η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in R - Z$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ , δηλαδή

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)$$

Πράγματι, αν  $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  και θέσουμε  $u = \alpha \ln x$ , τότε έχουμε  $y = e^u$ . Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

➤ Να αποδείξετε ότι  $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$ , με  $\alpha > 0$  (σελίδες 234-235)

*Απόδειξη:*

- Η συνάρτηση  $f(x) = \alpha^x$ ,  $\alpha > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R$  και ισχύει  $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$ , δηλαδή

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$$

Πράγματι, αν  $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$  και θέσουμε  $u = x \ln \alpha$ , τότε έχουμε  $y = e^u$ . Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

➤ Να αποδείξετε ότι  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ , με  $x \in R^*$  (σελίδα 235)

**Απόδειξη:**

- Η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in R^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R^*$  και ισχύει

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Πράγματι

— αν  $x > 0$ , τότε  $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ , ενώ

— αν  $x < 0$ , τότε  $\ln|x| = \ln(-x)$ , οπότε, αν θέσουμε  $y = \ln(-x)$  και  $u = -x$ , έχουμε  $y = \ln u$ .

Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

➤ **ΘΕΩΡΗΜΑ** (σελίδα 251)

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $A$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $A$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε  $x$  στην  $A$ ,

τότε η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $A$ .

**Απόδειξη:**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Πράγματι

• Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .

• Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $A$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$ , οπότε, λόγω της (1), είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Αν  $x_2 < x_1$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ . ■

## ➤ ΠΟΡΙΣΜΑ (σελίδα 251)

Εστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = g'(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ ,

τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει:

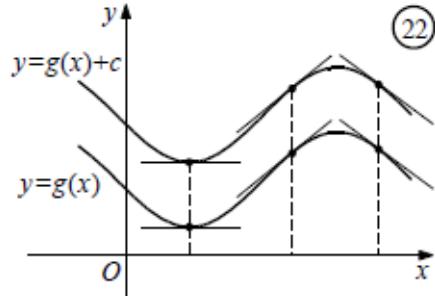
$$f(x) = g(x) + c$$

**Απόδειξη:**

Η συνάρτηση  $f - g$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x \in \Delta$  ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση  $f - g$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ . Άρα, υπάρχει σταθερά  $C$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει  $f(x) - g(x) = C$ , οπότε  $f(x) = g(x) + C$ . ■



## ➤ ΘΕΩΡΗΜΑ (σελίδα 253)

Εστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Απόδειξη:**

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι  $f'(x) > 0$ .

Έστω  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ . Θα δείξουμε ότι  $f(x_1) < f(x_2)$ . Πράγματι, στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή  $f'(\xi) > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$ , έχουμε  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , οπότε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

- Στην περίπτωση που είναι  $f'(x) < 0$  εργαζόμαστε αναλόγως. ■

## ➤ ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat) (σελίδες 260-261)

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

**Απόδειξη:**

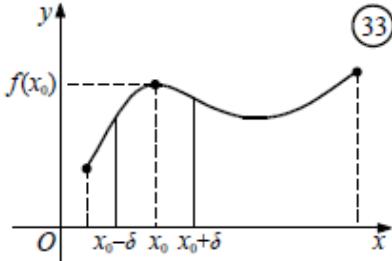
Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό μέγιστο. Επειδή το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  και η  $f$  παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



Επομένως,

— αν  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , τότε, λόγω της (1), θα είναι  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , τότε, λόγω της (1), θα είναι  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε  $f'(x_0) = 0$ .

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

## ➤ ΘΕΩΡΗΜΑ (σελίδες 262-263)

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

- i) Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ . (Σχ. 35α)
- ii) Αν  $f'(x) < 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ . (Σχ. 35β)
- iii) Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ . (Σχ. 35γ).

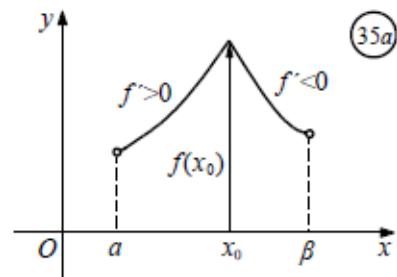
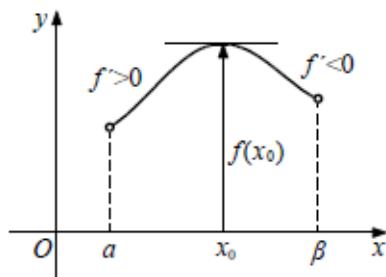
### Απόδειξη (μόνο του i και του iii):

i) Επειδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ . Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γησίως φθίνουσα στο  $[x_0, \beta)$ . Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$



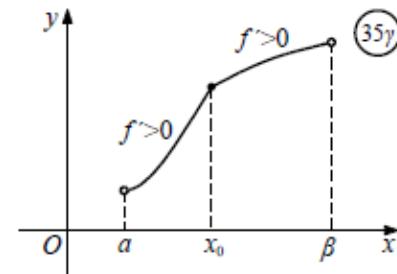
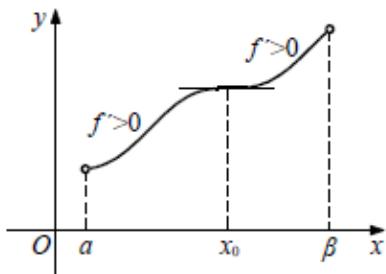
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το  $f(x_0)$  είναι μέγιστο της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$  και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .



Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  θα είναι γησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(\alpha, x_0]$  και  $[x_0, \beta)$ . Επομένως, για  $x_1 < x_0 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ . Άρα το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο της  $f$ . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η  $f$  είναι γησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ . Πρόγραματι, έστω  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  με  $x_1 < x_2$ .

— Αν  $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ , επειδή η  $f$  είναι γησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

— Αν  $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ , επειδή η  $f$  είναι γησίως αύξουσα στο  $[x_0, \beta)$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

— Τέλος, αν  $x_1 < x_0 < x_2$ , τότε όπως είδαμε  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ .

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ , οπότε η  $f$  είναι γησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

Ομοίως, αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . ■

➤ ΘΕΩΡΗΜΑ (σελίδα 304)

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in R,$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in R.$$

**Απόδειξη:**

- Κάθε συνάρτηση της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ , όπου  $c \in R$ , είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω  $G$  είναι μια άλλη παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ . Τότε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύουν  $F'(x) = f(x)$  και  $G'(x) = f(x)$ , οπότε

$$G'(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta. \quad \blacksquare$$

➤ ΘΕΩΡΗΜΑ (σελίδα 334)

Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $a$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ . Δηλαδή ισχύει:

$$\left( \int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

## ➤ ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

(σελίδες 334-335)

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Απόδειξη:**

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση  $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ . Επειδή και η  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , θα υπάρχει  $c \in R$  τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \quad (1)$$

Από την (1), για  $x = \alpha$ , έχουμε  $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$ , οπότε  $c = G(\alpha)$ .

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για  $x = \beta$ , έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και áρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \quad \blacksquare$$

## ΟΡΙΣΜΟΙ

Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  ;

Σύνολο τιμών της  $f$  λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της  $f$  σε όλα τα  $x \in A$ . Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

Το σύνολο τιμών της  $f$  στο  $A$  συμβολίζεται με  $f(A)$ .

Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  ;

Γραφική παράσταση της  $f$  λέμε το σύνολο των σημείων  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει  $y = f(x)$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων  $M(x, f(x))$ , με  $x \in A$ .

Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες ;

Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$  και
- για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = g(x)$  .

Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  ;

• Η συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα  $\delta$  ι ά σ τη μ α  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

• Η συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα  $\delta$  ι ά σ τη μ α  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι:

• Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ , όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

• Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) ελάχιστο, το  $f(x_0)$ , όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \quad .$$

Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται 1-1;

Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow R$  λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$  ισχύει ότι  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  αντιστρέφεται

Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow R$  αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι 1-1. Η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  που συμβολίζεται με  $f^{-1}$  ορίζεται από τη σχέση :

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ;

Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της , όταν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

---

Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και πότε στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$

- Μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$  .
- Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

---

Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ ,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

---

Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής .

Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

Δηλαδή, υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$  τέτοια, ώστε, αν  $m = f(x_1)$  και  $M = f(x_2)$  , να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

---

Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ;

Μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$**  και συμβολίζεται με  $f'(x_0)$  . Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται :

**α)** Παραγωγίσιμη στο σύνολο  $A$

**β)** Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$

**γ)** Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$

Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ . Θα λέμε ότι:

**α)** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $A$  ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0 \in A$ .

**β)** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ .

**γ)** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους για το μέγεθος  $X$  για  $X = X_0$ , αν

$y = f(X)$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ;

Αν δύο μεταβλητές μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , όταν  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$  την παράγωγο  $f'(x_0)$ .

Να διατυπώσετε τι θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

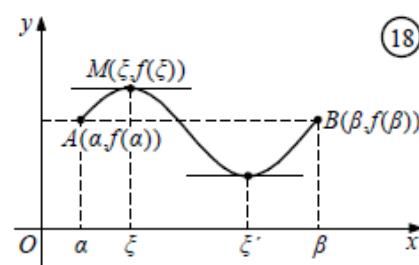
Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ .



Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Το θεώρημα της μέσης διατυπώνεται ως εξής :

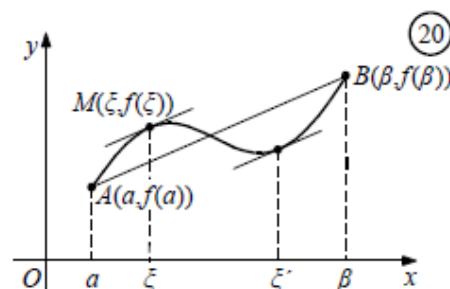
Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη της ευθείας  $AB$ .



Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο ;

a) Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε :

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το  $x_0$  λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το  $f(x_0)$  **τοπικό μέγιστο της  $f$** .

β) Μία συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε :

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το  $x_0$  λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το  $f(x_0)$  **τοπικό ελάχιστο της  $f$** .

**α)** Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  ;

**β)** Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  ;

α) **Κρίσιμα σημεία** της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$  λέγονται τα **εσωτερικά σημεία** του  $\Delta$ , στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

β) Οι **πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων** μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η παράγωγος της  $f$  μηδενίζεται.**
2. **Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται.**
3. **Τα άκρα του  $\Delta$**  (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα σε μια συνεχή συνάρτηση  $f$  σε ένα κλειστό διάστημα ;  
Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου της συνάρτησης  $f$  σε ένα κλειστό διάστημα  
εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της  $f$ .
  2. Υπολογίζουμε τις τιμές της  $f$  στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
  3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της  $f$ .
- 

Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται κυρτή και πότε κούλη σε ένα διάστημα  $\Delta$  ;

- Η συνάρτηση  $f$  λέγεται κυρτή ή ότι **στρέφει τα κούλα** άνω σ' ένα διάστημα  $\Delta$  όταν είναι συνεχής στο  $\Delta$  και η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\epsilon \sigma \omega \tau \epsilon r i k \circ$  του  $\Delta$ .
  - Η συνάρτηση  $f$  λέγεται κούλη ή ότι **στρέφει τα κούλα προς τα κάτω** στο  $\Delta$ , αν είναι συνεχής στο  $\Delta$  και η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\epsilon \sigma \omega \tau \epsilon r i k \circ$  του  $\Delta$ .
- 

Πότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης  $f$  ;

Το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της  $f$ , όταν :

- η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κούλη στο  $(x_0, \beta)$ , ή αντιστρόφως, και
  - η  $C_f$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .
- 

**Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα ;**

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  είναι:

- i) **Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f''$  μηδενίζεται .**
  - ii) **Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία δεν υπάρχει η  $f''$  .**
- 

Πότε λέμε ότι η ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$  ;

Η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$ , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$

---

Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ ) .

Η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ ), όταν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  (αντιστοίχως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ) .

---

Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αντιστοίχως στο  $-\infty$  ;

Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αντιστοίχως στο  $-\infty$ , αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ , αντιστοίχως αν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ .

Να διατυπώσετε τους κανόνες de L'Hospital .

### 1ος Κανόνας

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

### 2ος Κανόνας

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζουμε κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγή στο  $\Delta$  και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

Έστω μια συνάρτηση  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ .

Με τα σημεία  $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$  χωρίζουμε το διάστημα  $[\alpha, \beta]$  σε  $v$  ισομήκη

υποδιαστήματα μήκουνς  $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{v}$ .

Τα ο όριο του αθροίσματος  $S_v$ , δηλαδή το  $\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^v f(\xi_k) \Delta x \right)$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων  $\xi_k$ .

Το παραπάνω όριο ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης  $f$  από το  $\alpha$  στο  $\beta$ , συμβολίζεται με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της  $f$  από το  $\alpha$  στο  $\beta$ ". Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^v f(\xi_k) \Delta x \right)$$