ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $ημx = -\frac{3}{5}$ *και* $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, *τοτε να υπολογισετε τη τιμη της παραστασης :*

$$A = \frac{ημx + συνx}{εφx - σφx}$$

ΛΥΣΗ

Ειναι

$$\bullet\ ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + συν^2x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + συν^2x = 1 \Leftrightarrow συν^2x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$συν^2x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow συνx = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \underset{συνx<0}{\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{\Leftrightarrow}} συνx = -\frac{4}{5}$$

$$\bullet\ εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\bullet\ σφx = \frac{1}{εφx} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Οποτε

$$A = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{7}{12}} = \frac{12}{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *και* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, *τοτε να υπολογισετε τους αλλους τριγωνομετρικους αριθμους.*

ΛΥΣΗ

Ειναι

$$\bullet\ σφx = \frac{1}{εφx} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \overset{\cdot\sqrt{3}}{=} \sqrt{3}$$

$$\bullet\ συν^2x = \frac{1}{1+εφ^2x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{3}{9}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow συνx = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow$$

$$συνx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \underset{συνx<0}{\overset{\frac{\pi}{2}<x<\pi}{\Leftrightarrow}} συνx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet\ εφx = \frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow ημx = εφx συνx \Leftrightarrow ημx = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow ημx = \frac{3}{6} \Leftrightarrow ημx = \frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $x > \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *και* $ημα = \sqrt{\frac{2x-1}{2x}}$, *τοτε να δειξετε οτι :* $εφα = \sqrt{2x-1}$.

ΛΥΣΗ

Ειναι

$$ημα = \sqrt{\frac{2x-1}{2x}} \overset{x>\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} ημ^2α = \frac{2x-1}{2x} \Leftrightarrow ημ^2α = \frac{2x}{2x} - \frac{1}{2x} \Leftrightarrow ημ^2α = 1 - \frac{1}{2x} \overset{ημ^2α+συν^2x=1}{\Leftrightarrow}$$

$$ημ^2α = ημ^2α + συν^2x - \frac{1}{2x} \Leftrightarrow συν^2x = \frac{1}{2x} \overset{x>\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} συνx = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Οποτε

$$εφα = \frac{ημα}{συνα} = \frac{\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}}{\frac{1}{\sqrt{2x}}} = \frac{\frac{\sqrt{2x-1}}{\cancel{\sqrt{2x}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2x}}}} = \frac{\sqrt{2x-1}}{1} = \sqrt{2x-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν x_1, x_2 *ειναι ριζες της εξισωσης* $(1-συνα)x^2 - (1-συν^2α)x - ημ^2α - συνα + 1 = 0$, *με* $α \neq 2κπ$, *να δειξετε οτι :* $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 1$.

ΛΥΣΗ

Ειναι

$$\bullet\ x_1 + x_2 \underset{συνα\neq1}{\overset{α\neq2κπ}{=}} \frac{1-συν^2α}{1-συνα} = \frac{\cancel{(1-συνα)}(1+συνα)}{\cancel{1-συνα}} = 1 + συνα$$

$$\bullet\ x_1 \cdot x_2 \underset{συνα\neq1}{\overset{α\neq2κπ}{=}} \frac{1-ημ^2α-συνα}{1-συνα}$$

Οποτε

$$x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 1 + συνα + \frac{1-ημ^2α-συνα}{1-συνα} \overset{1-ημ^2α=συν^2α}{=}$$

$$= \frac{(1+συνα)(1-συνα) + συν^2α - συνα}{1-συνα} =$$

$$= \frac{1-συν^2α+συν^2α-συνα}{1-συνα} =$$

$$= \frac{1-συνα}{1-συνα} = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Αν $ημx + 3συνx = 3$, *τοτε να δειξετε οτι :* $(3ημx - συνx)^2 = 1$

ΛΥΣΗ

Ειναι

$$ημx + 3συνx = 3 \Leftrightarrow (ημx + 3συνx)^2 = 3^2 \Leftrightarrow ημ^2x + 6συνx + 9συν^2x = 9 \Leftrightarrow$$

$$ημ^2x + 6συνx + συν^2x + 8συν^2x = 9 \cdot 1 \overset{ημ^2x+συν^2x=1}{\Leftrightarrow} 1 + 6συνx + 8συν^2x = 9 \cdot (ημ^2x + συν^2x) \Leftrightarrow$$

$$1 + 6συνx + 8συν^2x = 9ημ^2x + 9συν^2x \Leftrightarrow 9ημ^2x + συν^2x - 6συνx = 1 \Leftrightarrow$$

$$(3ημx - συνx)^2 = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να δειξετε οτι για οποιαδηποτε γωνια α, ισχυει : $\dfrac{1-\sigma\varphi^2\alpha}{1+\sigma\varphi^2\alpha}-1=2\eta\mu^2\alpha$

ΛΥΣΗ

Ειναι

$$\frac{1-\sigma\varphi^2\alpha}{1+\sigma\varphi^2\alpha}-1=\frac{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}}{1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}}-1=\frac{\dfrac{\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}}{\dfrac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}}-1\overset{\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\eta\mu^2\alpha}{\underset{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1}{=}}$$

$$=\frac{\eta\mu^2\alpha-(1-\eta\mu^2\alpha)}{1}-1=\eta\mu^2\alpha-1+\eta\mu^2\alpha-1=2\eta\mu^2\alpha$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να αποδειξετε οτι :

- $\varepsilon\varphi 1^0\cdot\varepsilon\varphi 2^0\cdot\ldots\cdot\varepsilon\varphi 89^0=1$
- $\dfrac{2\eta\mu 150^0+\varepsilon\varphi\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu 330^0}{\sigma\varphi\dfrac{5\pi}{4}+\eta\mu\left(\dfrac{23\pi}{6}\right)}=1$

ΛΥΣΗ

- $\varepsilon\varphi 1^0\cdot\varepsilon\varphi 2^0\cdot\ldots\cdot\varepsilon\varphi 89^0=$

$$=\underbrace{(\varepsilon\varphi 1^0\cdot\varepsilon\varphi 89^0)\cdot(\varepsilon\varphi 2^0\cdot\varepsilon\varphi 88^0)\cdot\ldots\cdot(\varepsilon\varphi 44^0\cdot\varepsilon\varphi 46^0)}_{44\ \text{ζευγη}}\cdot\varepsilon\varphi 45^0=$$

$$=[\varepsilon\varphi 1^0\cdot\varepsilon\varphi(90^0-1^0)]\cdot[\varepsilon\varphi 2^0\cdot\varepsilon\varphi(90^0-2^0)]\cdot\ldots\cdot[\varepsilon\varphi 44^0\cdot\varepsilon\varphi(90^0-44^0)]\cdot\varepsilon\varphi 45^0=$$

$$\overset{\varepsilon\varphi(90^0-\alpha)=\sigma\varphi\alpha}{=}(\varepsilon\varphi 1^0\cdot\sigma\varphi 1^0)\cdot(\varepsilon\varphi 2^0\cdot\sigma\varphi 2^0)\cdot\ldots\cdot(\varepsilon\varphi 44^0\cdot\sigma\varphi 44^0)\cdot\varepsilon\varphi 45^0\overset{\varepsilon\varphi\alpha\sigma\varphi\alpha=1}{\underset{\varepsilon\varphi 45^0=1}{=}}$$

$$=\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{44\ \text{οροι}}\cdot 1=1$$

- $\eta\mu 150^0=\eta\mu(90^0+60^0)=\sigma\upsilon\nu 60^0=\dfrac{1}{2}$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu 330^0=\sigma\upsilon\nu(360^0-30^0)=\sigma\upsilon\nu 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\varphi\frac{5\pi}{4}=\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{4}=1$$

$$\eta\mu\left(\frac{23\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

Οποτε

$$\frac{2\eta\mu 150^0+\varepsilon\varphi\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu 330^0}{\sigma\varphi\dfrac{5\pi}{4}+\eta\mu\left(\dfrac{23\pi}{6}\right)}=\frac{2\cdot\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\frac{1-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}=1$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρειτε τη μεγιστη και ελαχιστη τιμη των παραστασεων :

• $A = 1 + 2\eta\mu\alpha$ • $B = \dfrac{2}{3 - \sigma\upsilon\nu\alpha}$

ΛΥΣΗ

Ειναι

• $-1 \le \eta\mu\alpha \le 1 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} -2 \le 2\eta\mu\alpha \le 2 \overset{+1}{\Leftrightarrow} 1-2 \le 1+2\eta\mu\alpha \le 2+1 \Leftrightarrow -1 \le A \le 3$

Αρα, $A_{min} = -1$ και $A_{max} = 3$

• $-1 \le \sigma\upsilon\nu\alpha \le 1 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} 1 \ge -\sigma\upsilon\nu\alpha \ge -1 \Leftrightarrow -1 \le -\sigma\upsilon\nu\alpha \le 1 \overset{+3}{\Leftrightarrow}$

$3-1 \le 3-\sigma\upsilon\nu\alpha \le 3+1 \Leftrightarrow 2 \le 3-\sigma\upsilon\nu\alpha \le 4 \overset{\text{αντιστροφη}}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{2} \ge \dfrac{1}{3-\sigma\upsilon\nu\alpha} \ge \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{3-\sigma\upsilon\nu\alpha} \le \dfrac{1}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \dfrac{2}{4} \le \dfrac{2}{3-\sigma\upsilon\nu\alpha} \le \dfrac{2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le B \le 1.$

Αρα, $B_{min} = \dfrac{1}{2}$ και $B_{max} = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να αποδειξετε οτι :

• *σε καθε τριγωνο ΑΒΓ ισχυει :* $\eta\mu^2\dfrac{B}{2} + \eta\mu^2\left(\dfrac{A+\Gamma}{2}\right) = 1$

• *σε ισοσκελες τριγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ = α) η βαση του ΒΓ =* $2\alpha\eta\mu\dfrac{A}{2}$.

ΛΥΣΗ

Ειναι

• $A+B+\Gamma = \pi \Leftrightarrow \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{A}{2}+\dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2} \Leftrightarrow$

$\eta\mu\left(\dfrac{A+\Gamma}{2}\right) = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2}\right) \overset{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha}{\Leftrightarrow} \eta\mu\left(\dfrac{A+\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}$ (1)

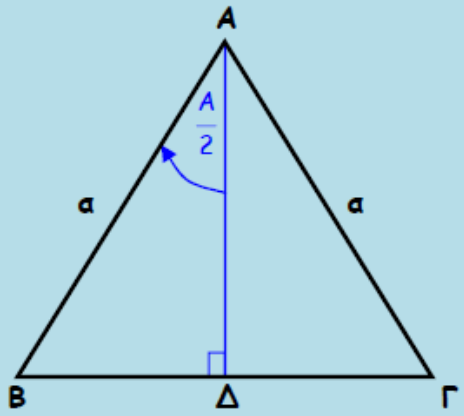
Οποτε

$\eta\mu^2\dfrac{B}{2} + \eta\mu^2\left(\dfrac{A+\Gamma}{2}\right) \overset{(1)}{=} \eta\mu^2\dfrac{B}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{B}{2} \overset{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1}{=} 1$

• Στο ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΔ, απ'τον ορισμο του ημιτονου ειναι :

$\eta\mu\dfrac{A}{2} = \dfrac{B\Delta}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu\dfrac{A}{2} = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu\dfrac{A}{2} = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{\alpha} \Leftrightarrow$

$\alpha\eta\mu\dfrac{A}{2} = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\alpha\eta\mu\dfrac{A}{2}$



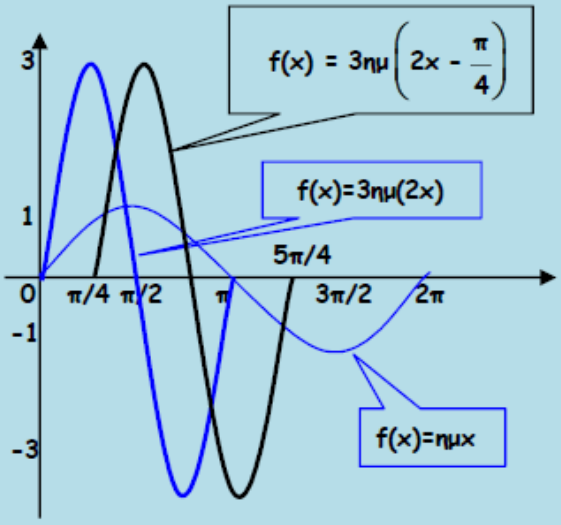
ΑΣΚΗΣΗ 10

- *Να βρείτε τη μεγιστη - ελαχιστη τιμη, τη περιοδο και να παραστησετε γραφικα τη συν - αρτηση* $f(x) = 3\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.
- *Να βρείτε τη μεγιστη - ελαχιστη τιμη, τη περιοδο και να παραστησετε γραφικα τη συν - αρτηση* $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x + 1$.

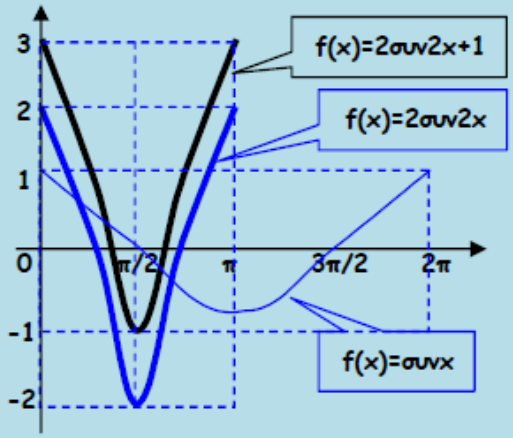
ΛΥΣΗ

Ειναι

- Η συναρτηση $f(x) = 3\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ειναι της μορφης : $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x + \varphi)$ και
  - Μεγιστη τιμη : $\rho = 3$
  - Ελαχιστη τιμη : $-\rho = -3$
  - Περιοδος : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
  - Η γρ.παρασταση της ειναι η γρ.παρα - σταση της $f(x) = 3\eta\mu 2x$, μετατοπισμε - νη κατα $\frac{\pi}{4}$ μοναδες δεξια.



- Η συναρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x + 1$ ειναι της μορφης : $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega x) + \mu$ και
  - Μεγιστη τιμη : $\rho + \mu = 3$
  - Ελαχιστη τιμη : $-\rho + \mu = -1$
  - Περιοδος : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
  - Η γρ.παρασταση της ειναι η γρ.παρα - σταση της $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$, μετατοπισμε - νη κατα 1 μοναδα προς τα πανω.



ΑΣΚΗΣΗ 11

Να λυθουν οι εξισωσεις :

- $2\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$
- $2\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$
- $\varepsilon\varphi^2 x-(1+\sqrt{3})\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}=0$

ΛΥΣΗ

Ειναι

- $2\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{12} \\ x=2\kappa\pi-\frac{7\pi}{12} \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

- $2\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3} \\ x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\frac{4\pi}{3} \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \\ x=2\kappa\pi+\pi-\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{19\pi}{12} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{12} \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

- $\varepsilon\varphi^2 x-(1+\sqrt{3})\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x-\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi x(\varepsilon\varphi x-1)-\sqrt{3}(\varepsilon\varphi x-1)=0 \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x-1)(\varepsilon\varphi x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi x-1=0 \\ \varepsilon\varphi x-\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi x=1 \\ \varepsilon\varphi x=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \\ \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \\ x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να λυθουν οι εξισωσεις :

- $\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}$
- $\varepsilon\varphi x.\varepsilon\varphi 2x=1$
- $(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2=1-2\eta\mu^2 x$

ΛΥΣΗ

Ειναι

- $\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\\2x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\kappa\pi-\frac{\pi}{24}\\x=\kappa\pi-\frac{5\pi}{24}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

- $\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi 2x=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi 2x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi 2x=\sigma\varphi x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi 2x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow$

$$2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-x,\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}$$

- $(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2=1-2\eta\mu^2 x\Leftrightarrow\eta\mu^2 x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1-2\eta\mu^2 x\Leftrightarrow$

$$1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=1-2\eta\mu^2 x\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu x(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\eta\mu x=0\\\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta\mu x=\eta\mu 0\\\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\eta\mu x=\eta\mu 0\\\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi\ \ \eta\ x=2\kappa\pi+\pi\\x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-x\ \eta\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}+x\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$x=2\kappa\pi\ \ \eta\ \ x=2\kappa\pi+\pi\ \ \eta\ \ x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να λυθει η εξισωση : $\sqrt{3}\varepsilon\varphi(4x - \frac{\pi}{3}) = -3$ *στο διαστημα* $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

ΛΥΣΗ

Ειναι

$$\sqrt{3}\varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}} \overset{\cdot\sqrt{3}}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$4x - \frac{\pi}{3} = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4x = \kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ομως

$$\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} \le \frac{\kappa\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \pi \le \kappa\pi < 5\pi \Leftrightarrow 1 \le \kappa < 5 \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 1, 2, 3, 4$$

- Για $\kappa = 1$ τοτε $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- Για $\kappa = 2$ τοτε $x = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
- Για $\kappa = 3$ τοτε $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$
- Για $\kappa = 4$ τοτε $x = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Οποτε το συνολο λυσεων ειναι : $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}\right\}$.