ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμοί

1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε $x \in A \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$, όπου A το πεδίο ορισμού της f.
Το x_o λέγεται θέση τοπικού μεγίστου και το $f(x_o)$ τοπικό μέγιστο της f.
Αν ισχύει ότι $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο, το $f(x_o)$.

2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $x \in A \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$, όπου A το πεδίο ορισμού της f.
Το x_o λέγεται θέση τοπικού ελαχίστου και το $f(x_o)$ τοπικό ελάχιστο της f.
Αν ισχύει ότι $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο, το $f(x_o)$.

- Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f ονομάζονται τοπικά ακρότατα της f. Τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται ολικά ακρότατα ή απλά ακρότατα της f.

Θεώρημα Fermat

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o και παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό ακρότατο, τότε ισχύει $f'(x_o) = 0$.

Ορισμός

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη ή η παράγωγός της είναι μηδέν, ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f που ορίζεται σ' ένα διάστημα (α, β) και x_o, ένα κρίσιμο σημείο της f στο (α, β) στο οποίο η f είναι συνεχής.
α) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o, \beta)$, τότε το $f(x_o)$

είναι τοπικό ελάχιστο της f.
β) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_o, \beta)$, τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
γ) Αν η f΄ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$, τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Παρατηρήσεις

1. Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat δεν ισχύει. Δηλαδή είναι δυνατόν να έχουμε $f'(x_o) = 0$ χωρίς η f να έχει ακρότατο στο x_o.
Πράγματι για την $f(x) = 2x^3$ είναι $f'(x) = 6x^2$. Είναι $f'(0) = 6 \cdot 0^2 = 0$ χωρίς να έχουμε ακρότατο στο $x_o = 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2. Είναι δυνατόν η f να παρουσιάζει ακρότατο στο x_o χωρίς να είναι $f'(x_o) = 0$, γιατί μπορεί η f να μην παραγωγίζεται στο x_o.
Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 1$ το $f(1) = 0$, αφού $f(x) = |x - 1| \geq 0$, αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

3. Το διάστημα στο οποίο ορίζεται η f μπορεί να είναι κλειστό, αλλά στο x_o στο οποίο παρουσιάζει το ακρότατο πρέπει να είναι εσωτερικό στο διάστημα αυτό, για να έχουμε υποχρεωτικά $f'(x_o) = 0$. Δηλαδή αν η f ορίζεται στο [α, β] και παραγωγίζεται σ' αυτό να μην είναι το $x_o = \alpha$ ή το $x_o = \beta$.
Πράγματι η $f(x) = x^2$ παραγωγίζεται στο [1, 3] και είναι $1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 9$. Δηλαδή παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = 1$ και μέγιστο στο $x_2 = 3$, χωρίς να είναι $f'(1) = 0$ και $f'(3) = 0$, διότι $f'(x) = 2x$ και $f'(1) = 2$, $f'(3) = 6$.

4. Ένα τοπικό ελάχιστο είναι δυνατόν να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

5. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, τότε αυτό είναι το μικρότερο απ' τα τοπικά ελάχιστα της f.
Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο απ' τα τοπικά μέγιστα της f.

6. Το μεγαλύτερο απ' τα τοπικά μέγιστα δεν είναι πάντα το μέγιστο της συνάρτησης. Επίσης το μικρότερο απ' τα τοπικά ελάχιστα δεν είναι πάντα το ελάχιστο αυτής. Αυτό εξετάζεται με τη βοήθεια των ορίων στα άκρα των διαστημάτων που ορίζεται η συνάρτηση.

7. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Τα τοπικά ακρότατα της f τα αναζητούμε:
α) στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η παράγωγος της f μηδενίζεται,
β) στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου δεν ορίζεται η παράγωγος της f,
γ) στα άκρα του Δ όπου η f ορίζεται.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Για να βρούμε τα τοπικά ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f ακολουθούμε τη διαδικασία εύρεσης μονοτονίας. Τοπικά ακρότατα θα έχουμε στα κρίσιμα σημεία εκατέρωθεν των οποίων η f΄ αλλάζει πρόσημο και στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f ορίζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:
α) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$
β) $f(x) = xe^x$
γ) $f(x) = x\ln x$

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = (x^4 - 8x^2 + 5)' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$.
$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x(x^2 - 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.
Το πρόσημο της f΄, η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
x - 2		-		-		-	0	+	
x + 2		-	0	+		+		+	
f΄		-	0	+	0	-	0	+	
f		↘	-11	↗	5	↘	-11	↗	
			Ο. Ε.		Τ. Μ.		Ο. Ε.		

Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για x = -2 το f(-2) = -11, τοπικό μέγιστο για x = 0 το f(0) = 5, τοπικό και ολικό ελάχιστο για x = 2 το f(2) = -11.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + x)e^x = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1 + x)e^x > 0 \Leftrightarrow 1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Το πρόσημο της f΄, η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	$\boxed{-\frac{1}{e}}$	↗	

Ο. Ε.

Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για x = -1 το $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$.

Το πρόσημο της f΄, η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	$\boxed{-\frac{1}{e}}$	↗	

Ο. Ε.

Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{e}$ το $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η
Μπορούμε να εξετάσουμε αν ένα από τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f είναι και ολικό με τη βοήθεια των ορίων της f στο $+\infty$, στο $-\infty$ (αν έχουν νόημα) και των πλευρικών ορίων της f στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f στα οποία αυτή δεν ορίζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να εξετάσετε, αν η f παρουσιάζει ολικά ακρότατα.
β) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x και μετά δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα.

Λύση

α) Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Επίσης είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x = 4x(x^2 + 3x + 2)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = -2$.
Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
x		-		-		-	0	+	
x + 1		-		-	0	+		+	
x + 2		-	0	+		+		+	
f΄		-	0	+	0	-	0	+	
f	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$
			Ο. Ε.		Τ. Μ.		Ο. Ε.		

Η f στο $x = -2$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $f(-2) = 1$.
Στο $x = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 1$.
Στο $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(-1) = 2$.
Επίσης: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$.
Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και αυτό βρίσκεται για $x = -2$ ή $x = 0$.
β) Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι η συνάρτηση
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f΄ είναι παραγωγίσιμη με: $(f'(x))' = f''(x) = 12x^2 + 24x + 8 = 4(3x^2 + 6x + 2)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4(3x^2 + 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$ ή $x = \dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 4(3x^2 + 6x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$ ή $x < \dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}$.

Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα του ρυθμού μεταβολής της f (δηλαδή της f΄) φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f΄		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	$+\infty$

Η f΄ στο $x = \dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3})$.

Στο $x = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3})$.

Επίσης: $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+8}, & \text{αν } x \le 1 \\ x^2 - 10x + 12, & \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως ρίζα πολυωνυμικής συνάρτησης και συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική. Στο $x_o = 1$ θα εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής με τον ορισμό.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{x^2+8} = \sqrt{1^2+8} = 3$.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} (x^2 - 10x + 12) = 1^2 - 10\cdot1 + 12 = 3$ και $f(1) = 3$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ και σ' όλο το $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+8}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+8}}(x^2+8)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f'(x) = (x^2 - 10x + 12)' = 2x - 10 = 2(x - 5)$. Στο $x_o = 1$ θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη με τον ορισμό.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)} =$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+8-9}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Επίσης $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-10x+12-3}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-10x+9}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x-9)}{x-1}$
$= \lim_{x\to1^+}(x-9) = -8$.

Επειδή $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ κι

επομένως $f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}, & \text{αν } x<1 \\ 2x-10, & \text{αν } x>1 \end{cases}$.

x	$-\infty$		0		1		5		$+\infty$
f΄		-	0	+	‖	-	0	+	
f		↘	$\sqrt{8}$	↗	3	↘	-13	↗	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Όπως φαίνεται απ' τον πίνακα της f΄, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[1, 5]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, 1]$, $[5, +\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = 0, το $f(0) = \sqrt{8}$ και για x = 5 το f(5) = -13, ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x = 1, το f(1) = 3.

Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+8} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+10x+12) = +\infty$ και $-13 < \sqrt{8}$, το f(5) = -13 είναι και ολικό ελάχιστο της f, ενώ δεν υπάρχει ολικό μέγιστο της f.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3η

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [α, β], τότε παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο σ' αυτό το διάστημα. Για την εύρεσή τους εργαζόμαστε ως εξής:

Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα κρίσιμα σημεία της και στα άκρα των διαστημάτων. Η μεγαλύτερη τιμή Μ απ' αυτές είναι το μέγιστο και η μικρότερη τιμή m απ' αυτές είναι το ελάχιστο. Το σύνολο τιμών της f είναι το [m, M].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα και το σύνολο τιμών της συνάρτησης
$f(x) = ημ^2x - \sqrt{2}\,ημx + 2\sqrt{2}$, $x \in [0, π]$.

Λύση

Για κάθε $x \in [0, π]$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (ημ^2x - \sqrt{2}\,ημx + 2\sqrt{2})' =$
$2ημxσυνx - \sqrt{2}\,συνx = συνx(2ημx - \sqrt{2})$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx(2ημx - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow συνx = 0$ ή $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$x = \frac{π}{2}$ ή $x = \frac{π}{4}$ ή $x = \frac{3π}{4}$.

Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα κρίσιμα σημεία της και στα άκρα του διαστήματος [0, π]:

$f(\frac{π}{2}) = ημ^2\frac{π}{2} - \sqrt{2}\,ημ\frac{π}{2} + 2\sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 1$.

$f(\frac{π}{4}) = ημ^2\frac{π}{4} - \sqrt{2}\,ημ\frac{π}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

$f(\frac{3π}{4}) = ημ^2\frac{3π}{4} - \sqrt{2}\,ημ\frac{3π}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

$f(0) = ημ^2 0 - \sqrt{2}\,ημ0 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

$f(π) = ημ^2 π - \sqrt{2}\,ημπ + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Η μεγαλύτερη τιμή από τις παραπάνω είναι $2\sqrt{2}$, που είναι και το ολικό μέγιστο της f, ενώ η μικρότερη τιμή είναι το $2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$, που είναι και το ολικό ελάχιστο της f.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[2\sqrt{2} - \frac{1}{2}, 2\sqrt{2}]$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4η

Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει (τοπικό) ακρότατο σε εσωτερικό σημείο x_o διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε (σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat) ισχύει ότι $f΄(x_o) = 0$.
Σε ασκήσεις που ζητάμε τις τιμές κάποιων παραμέτρων, ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο στο x_o, θα πρέπει να γίνεται επαλήθευση, γιατί δε φτάνει η προϋπόθεση $f΄(x_o) = 0$. Είναι απαραίτητη και η αλλαγή προσήμου της f΄ εκατέρωθεν του x_o.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ για τα οποία η συνάρτηση $f(x) = x^2(\alpha\ln x - \beta)$, $x \in (0, +\infty)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $A(\sqrt{e}, -\frac{e}{2})$.

Λύση

Πρέπει το $A(\sqrt{e}, -\frac{e}{2})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f. Δηλαδή

$$f(\sqrt{e}) = -\frac{e}{2} \text{ ή } \left(\sqrt{e}\right)^2\left(\alpha\ln\sqrt{e} - \beta\right) = -\frac{e}{2} \text{ ή } e\left(\alpha\frac{1}{2} - \beta\right) = -\frac{e}{2}$$

ή $\frac{\alpha}{2} - \beta = -\frac{1}{2}$ ή $\alpha - 2\beta = -1$ (1).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f΄(x) = 2x(\alpha\ln x - \beta) + x^2\alpha\frac{1}{x} = 2\alpha x\ln x - 2\beta x + \alpha x = x(2\alpha\ln x + \alpha - 2\beta)$.

Για να παρουσιάζει η f ελάχιστο για $x = \sqrt{e}$ θα πρέπει σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat να είναι $f'(\sqrt{e}) = 0$ ή $\sqrt{e}(2\alpha\ln\sqrt{e} + \alpha - 2\beta) = 0$ ή

$2\alpha\frac{1}{2} + \alpha - 2\beta = 0$ ή $\alpha = \beta$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $\alpha - 2\alpha = -1$ ή $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.
Πράγματι για $\alpha = \beta = 1$ είναι $f(x) = x^2(\ln x - 1)$ και $f΄(x) = x(2\ln x - 1)$.
Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f΄		-	0	+	
f		↘	$-\frac{e}{2}$	↗	

Ο. Ε.

Στο $A(\sqrt{e}\,, -\frac{e}{2})$ έχουμε ολικό ελάχιστο της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x\ln\frac{x}{a}$ όπου $a \in \mathbb{R}^*$. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο το -2 να βρεθεί η θέση του ελαχίστου και το α.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$ αν $a > 0$ ή το $A=(-\infty, 0)$ αν $a < 0$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α και στις δύο περιπτώσεις με

$$f'(x) = \ln\frac{x}{a} + x\frac{1}{\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a} = \ln\frac{x}{a} + 1.$$

Έστω x_o η θέση του ελαχίστου. Τότε $f(x_o) = -2$ και $f'(x_o) = 0$ σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat.

$$f'(x_o) = 0 \text{ ή } \ln\frac{x_o}{a} + 1 = 0 \text{ ή } \ln\frac{x_o}{a} = -1 \text{ ή } \frac{x_o}{a} = e^{-1} \text{ ή } x_o = \frac{a}{e}.$$

$$f(x_o) = -2 \text{ ή } f(\frac{a}{e}) = -2 \text{ ή } \frac{a}{e}\ln\frac{\frac{a}{e}}{a} = -2 \text{ ή } \frac{a}{e}\ln\frac{1}{e} = -2 \text{ ή } -\frac{a}{e} = -2 \text{ ή}$$

$a = 2e$ και $x_o = 2$.

Πράγματι για $a = 2e$ είναι $f(x) = x\ln\frac{x}{2e}$ και $f'(x) = \ln\frac{x}{2e} + 1$. Το πρόσημο της f΄ η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		2		$+\infty$
f΄		-	0	+	
f		↘	$\boxed{-2}$	↗	
			Ο. Ε.		

Άρα για $x = 2$ και $a = 2e$ η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο το $f(2) = -2$.

☞ **ΜΕΘΟΔΟΣ 5η**

Όταν δίνεται μια ανισοτική σχέση της μορφής $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \Delta$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, τότε αναζητούμε κάποιο εσωτερικό σημείο x_o του Δ για το οποίο ισχύει $f(x_o) = 0$.

Τότε θα ισχύει $f(x) \geq f(x_o)$ ή $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε $x \in \Delta$, κι επομένως η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_o.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_o) = 0$, απ' όπου προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Αν η ανίσωση $\frac{1}{2}a^x \geq 1 - 2^{x-1}$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο θετικός αριθμός α.

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{1}{2}a^x - 1 + 2^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (\frac{1}{2}a^x - 1 + 2^{x-1})' = \frac{1}{2}a^x\ln a + 2^{x-1}\ln 2(x - 1)' =$

$\frac{1}{2}a^x\ln a + 2^{x-1}\ln 2$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \frac{1}{2}a^0 - 1 + 2^{0-1} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\frac{1}{2}a^x \geq 1 - 2^{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^x - 1 + 2^{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$.

Άρα η f παρουσιάζει στο $x_o = 0$ ολικό ελάχιστο και σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0) ισχύει $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^0\ln a + 2^{-1}\ln 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\ln a = -\frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow \ln a = -\ln 2 \Leftrightarrow \ln a = \ln 2^{-1} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 0)$, για την οποία ισχύουν:
$f(-1) = -2$ και $e^{x+1}f(x) \leq -2$,για κάθε $x < 0$.

α) Να βρεθεί η $f'(-1)$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(-1, -2)$.

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = e^{x+1}f(x) + 2$, $x < 0$.
Η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με:
$g'(x) = [e^{x+1}f(x) + 2]' = (e^{x+1})' f(x) + e^{x+1}f'(x) = e^{x+1}f(x) + e^{x+1}f'(x) = e^{x+1}[f(x) + f'(x)]$.
Παρατηρούμε ότι: $g(-1) = e^0 f(-1) + 2 = -2 + 2 = 0$.
Για κάθε $x < 0$ έχουμε $e^{x+1}f(x) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(-1)$.
Επομένως η g στο $x_o = -1$ παρουσιάζει μέγιστο.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat είναι:
$g'(-1) = 0 \Leftrightarrow e^0[f(-1) + f'(-1)] = 0 \Leftrightarrow -2 + f'(-1) = 0 \Leftrightarrow f'(-1) = 2$.
β) Η εφαπτομένη της C_f, στο σημείο της $A(-1, -2)$ έχει εξίσωση:
ε: $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$ ή $y - (-2) = 2(x + 1)$ ή $y = 2x$.

☞ ΜΕΘΟΔΟΣ 6η

Για να αποδείξουμε ότι μια ανισότητα ισχύει για κάθε $x \in \Delta$ εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε τη συνάρτηση f που σχηματίζεται στο 1ο μέλος, αν στο 2ο μέλος αφήσουμε μόνο το μηδέν. Στη συνέχεια:

- για ανισώσεις της μορφής $f(x) > 0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η f έχει ελάχιστο στο Δ ένα θετικό αριθμό.
- για ανισώσεις της μορφής $f(x) \geq 0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η f έχει ελάχιστο στο Δ το μηδέν.
- για ανισώσεις της μορφής $f(x) < 0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η f έχει μέγιστο στο Δ έναν αρνητικό αριθμό.
- για ανισώσεις της μορφής $f(x) \leq 0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η f έχει μέγιστο στο Δ το μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να αποδειχθεί ότι $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

Έστω $f(x) = \ln x - x + 1$ με $x > 0$.
Για κάθε $x > 0$: $f'(x) = (\ln x - x + 1)' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 1.$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
f΄		+	0	-	
f		$\nearrow$	$\boxed{0}$	$\searrow$	
			Ο. Μ.		

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x = 1 το f(1) = 0.

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει: $f(x) \le f(1) \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \le 0 \Leftrightarrow$

$\ln x \le x - 1$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 7η

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση δεν έχει λύση στο διάστημα Δ εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε τη συνάρτηση f που σχηματίζεται στο 1ο μέλος αν στο 2ο μέλος αφήσουμε μόνο το μηδέν. Στη συνέχεια έχουμε τις εξής επιλογές:

- αποδεικνύουμε ότι το μηδέν δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- αποδεικνύουμε ότι η f έχει ελάχιστο ένα θετικό αριθμό.
- αποδεικνύουμε ότι η f έχει μέγιστο έναν αρνητικό αριθμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\ln x - 2x^2 + \frac{1}{2} = 0$, $x > 0$, είναι αδύνατη.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - 2x^2 + \frac{1}{2}$.

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (\ln x - 2x^2 + \frac{1}{2})' =$

$\frac{1}{x} - 4x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 4x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 4x \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 4x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 4x \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\boxed{-\ln 2}$	$\searrow$	
			Ο. Μ.		

Η f στο $x = \frac{1}{2}$ παρουσιάζει τοπικό και ολικό μέγιστο, το $f(\frac{1}{2}) = \ln\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = -\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\ln 2 < 0$.

Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \leq f(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \ln x - 2x^2 + \frac{1}{2} \leq -\ln 2 < 0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

☞ ΜΕΘΟΔΟΣ 8η

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο Δ δεν έχει ακρότατα έχουμε τις παρακάτω επιλογές:

- αν η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό διάστημα Δ, όπως είναι το $\mathbb{R}$, αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.
- υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο σημείο x_o του Δ και καταλήγουμε σε άτοπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να αποδειχθεί ότι αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει: $[f(x)]^3 + 5f(x) = 2e^x - x^2 + x$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι
$[(f(x))^3 + 5f(x)]' = (2e^x - x^2 + x)'$ ή $3[f(x)]^2 f'(x) + 5f'(x) = 2e^x - 2x + 1$ ή
$f'(x)[3(f(x)^2 + 5] = 2e^x - 2x + 1$ ή $f'(x) = \dfrac{2e^x - 2x + 1}{3(f(x))^2 + 5}$.

Για να αποδείξουμε ότι η f δεν έχει ακρότατα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η f δε μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$. Αυτό εξασφαλίζεται αν αποδείξουμε ότι $2e^x - 2x + 1 \neq 0$.
Έστω $g(x) = 2e^x - 2x + 1$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$.
Το πρόσημο της g', η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται απ' τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$\boxed{3}$	$\nearrow$	
			Ο. Ε.		

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ τοπικό και ολικό ελάχιστο το $g(0) = 3$.
Άρα $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $2e^x - 2x + 1 \geq 3 > 0$ δηλαδή $2e^x - 2x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΘΟΔΟΣ 9η

Σε προβλήματα μεγιστοποίησης - ελαχιστοποίησης προσπαθούμε να εκφράσουμε το μέγεθος που θέλουμε να γίνεται μέγιστο ή ελάχιστο σα συνάρτηση μιας μεταβλητής. Στη συνέχεια βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης αυτής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Θέλουμε να φτιάξουμε μια κυλινδρική δεξαμενή χωρητικότητας $16\pi\ m^3$ με όσο το δυνατό μικρότερο εμβαδόν επιφάνειας του κυλίνδρου. Να βρεθεί η ακτίνα της βάσης για την οποία έχουμε τη μικρότερη επιφάνεια του κυλίνδρου.

Λύση

Έστω r η ακτίνα του κυλίνδρου και h το ύψος του. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι
$V = \pi r^2 h$ ή $16\pi = \pi r^2 h$ ή $h = \dfrac{16}{r^2}$.

Το εμβαδόν του είναι: $E = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r\dfrac{16}{r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{32\pi}{r}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{32\pi}{r}$.

Για κάθε $r > 0$ είναι $E'(r) = 4\pi r - \dfrac{32\pi}{r^2} = 4\pi\dfrac{r^3 - 8}{r^2}$.

Το πρόσημο της Ε΄, η μονοτονία και τα ακρότατα της Ε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

r	0		2		$+\infty$
Ε΄		-	0	+	
Ε		$\searrow$	$\boxed{24\pi}$	$\nearrow$	
			Ο. Ε.		

Για $r = 2m$ η $E(r)$ παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο το $E(2) = 24\pi\ m^2$.
Άρα για $r = 2m$, $h = 4m$ έχουμε το μικρότερο εμβαδόν της επιφάνειας του κυλίνδρου.

Άλλα παραδείγματα Β΄ ομάδας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Για ποια τιμή του θετικού αριθμού α, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^{\alpha}e^{2\alpha-x}$, $x > 0$, γίνεται ελάχιστη;

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (x^{\alpha}e^{2\alpha-x})' = (x^{\alpha})'e^{2\alpha-x} + x^{\alpha}(e^{2\alpha-x})' = \alpha x^{\alpha-1}e^{2\alpha-x} - x^{\alpha}e^{2\alpha-x} = x^{\alpha-1}e^{2\alpha-x}(\alpha - x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\alpha-1}e^{2\alpha-x}(\alpha - x) = 0 \Leftrightarrow \alpha - x = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{\alpha-1}e^{2\alpha-x}(\alpha - x) > 0 \Leftrightarrow \alpha - x > 0 \Leftrightarrow x < \alpha$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		α		$+\infty$
f΄		+	0	-	
f		$\nearrow$	$\boxed{\alpha^{\alpha}e^{\alpha}}$	$\searrow$	
			Ο. Μ.		

Η f για x = α παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο το $f(\alpha) = \alpha^{\alpha}e^{\alpha}$.
Πρέπει τώρα να βρούμε την τιμή του α ώστε το $\alpha^{\alpha}e^{\alpha}$ να είναι ελάχιστο.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha) = \alpha^{\alpha}e^{\alpha}$, με $\alpha > 0$.
Για κάθε $\alpha > 0$ είναι $g'(\alpha) = (\alpha^{\alpha}e^{\alpha})' = (\alpha^{\alpha})'e^{\alpha} + \alpha^{\alpha}(e^{\alpha})' = (e^{\alpha\ln\alpha})'e^{\alpha} + \alpha^{\alpha}e^{\alpha} =$
$e^{\alpha\ln\alpha}(\alpha\ln\alpha)'e^{\alpha} + \alpha^{\alpha}e^{\alpha} = \alpha^{\alpha}(\ln\alpha + 1)e^{\alpha} + \alpha^{\alpha}e^{\alpha} = \alpha^{\alpha}e^{\alpha}(\ln\alpha + 2)$.

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^{\alpha}e^{\alpha}(\ln\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

$$g'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha^{\alpha}e^{\alpha}(\ln\alpha + 2) > 0 \Leftrightarrow \ln\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln\alpha > -2 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{e^2}.$$

α	0		$\frac{1}{e^2}$		$+\infty$
g΄		-	0	+	
g		↘	Ο. Ε.	↗	

Η g παρουσιάζει για $\alpha = \frac{1}{e^2}$ ολικό ελάχιστο.

Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστη για $\alpha = \frac{1}{e^2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδειχθεί η ανίσωση $\ln\alpha^{e} \cdot \log_{\alpha}x \le x$ για κάθε $x > 0$.

Λύση

Επειδή $\ln\alpha < 0$ η ανίσωση γράφεται $e\ln\alpha \cdot \log_{\alpha}x \le x$ ή $\frac{\log_{\alpha}x}{x} \ge \frac{1}{e\ln\alpha}$ ή
$\frac{\ln x}{x\ln\alpha} \ge \frac{1}{e\ln\alpha}$ ή $\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$.

Έστω $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Το πρόσημο της f΄,
η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται απ' τον παρακάτω πίνακα:

x	0		e		$+\infty$
f΄		+	0	-	
f		↗	$\frac{1}{e}$ Ο. Μ.	↘	

Επειδή το $f(e) = \frac{1}{e}$ είναι ολικό μέγιστο της f, θα ισχύει ότι $f(x) \leq f(e)$ για κάθε $x > 0$.

Δηλαδή ισχύει ότι $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ ή $\ln a^e \cdot \log_a x \leq x$ για κάθε $x > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδα

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ **β)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

γ) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 5$ **δ)** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

ε) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ **στ)** $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$

ζ) $f(x) = x\varepsilon\varphi x + \ln(\sigma\upsilon\nu x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

η) $f(x) = 4x^4\ln x - x^4$ **θ)** $f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$

ι) $f(x) = (2x^2 - 20x)\ln x - x^2 + 20x$ **ια)** $f(x)= \frac{e^x}{x^2-3}$

ιβ) $f(x) = -\frac{2}{\eta\mu x} + \sigma\varphi x$ με $x \in (0, \pi)$

ιγ) $f(x) = -\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x} + \varepsilon\varphi x$ με $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

ιδ) $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$ **ιε)** $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x^2$

ιστ) $f(x) = x^{\ln x+1}$ **ιζ)** $f(x) = e^{x\ln x}$

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = x|x-1|$ **β)** $f(x) = |x^2-2x|$

γ) $f(x) = x|x^2 -6x|$ **δ)** $f(x) = x|x^2 - 24x|$

ε) $f(x) = \begin{cases} -x^2+6x+3, & x \geq 2 \\ x^2+2x+3, & x < 2 \end{cases}$ **στ)** $f(x) = \begin{cases} x^2+4x+3, & x < 1 \\ x^2-6x+13, & x \geq 1 \end{cases}$

ζ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+8}, & x \leq 1 \\ x^2-8x+10, & x > 1 \end{cases}$ **η)** $f(x) = \begin{cases} ημx, & -π \leq x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, & x \geq 0 \end{cases}$

θ) $f(x) = ημ^2x + συνx + 1$, με $x \in [0, π]$

ι) $f(x) = x^2 + 4xσυνx - 4ημx$, με $x \in \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right]$.

3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+1}$, $x \in [-1, 1]$ **β)** $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3}$, $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$

γ) $f(x) = 2ημx - x$, $x \in \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right]$ **δ)** $f(x) = x^4 - 4x + 1$

ε) $f(x) = \begin{cases} ημx, & -π \leq x < 0 \\ x^2-2x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ **στ)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x < 1 \\ x^2-6x+7, & x \geq 1 \end{cases}$.

4. **α)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και το ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

5. **α)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

6. **α)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + α$ όπου $α \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, αν $-5 < α < -4$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f να βρεθεί το α ώστε τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $O(0, 0)$ να είναι συνευθειακά.

7. Να βρεθεί το $α \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = xe^{αx}$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -1$. Στη συνέχεια να βρεθεί το είδος του τοπικού ακροτάτου.

8. Να βρεθούν τα $α, β \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = αx\ln x - βx$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(e, -e)$. Τι είδους τοπικό ακρότατο παρουσιάζει η f στο A;

9. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - \alpha x + \beta)e^x$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o = 1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0, f(0)) να είναι κάθετη στην ευθεία $2y + x = 0$. Στη συνέχεια για τις τιμές των α, β που βρήκατε, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f;

10. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στο $x_1 = 1$ και στο $x_2 = 3$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί το είδος των τοπικών ακροτάτων και να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

11. Αν $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + (\lambda - 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3$, να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

12. Να χωριστεί ο αριθμός 16 σε δύο προσθετέους, έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

13. Το κόστος της εβδομαδιαίας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 350x + 100$ χιλιάδες δραχμές με $0 \leq x \leq 100$. Η είσπραξη απ' την πώληση x μονάδων είναι $E(x) = 200x - \frac{5}{2}x^2$ χιλιάδες δραχμές. Να βρεθεί η εβδομαδιαία παραγωγή για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

<u>Β΄ ομάδα</u>

1. Να αποδειχθεί ότι $x\ln x - 2x + e \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

2. Να αποδειχθεί ότι $2x^2\ln x - x^2 + 1 \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

3. Να αποδειχθεί ότι $xe^x - e^x + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Αν ισχύει ότι $x\alpha^x - \alpha^x + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = e$.

5. Αν ισχύει ότι $2x^2\log_\alpha x - x^2 + 1 \geq 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = e$.

6. Έστω $α_1$, $α_2$, $α_3$ πραγματικοί αριθμοί και $β_1$, $β_2$, $β_3$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση: $α_1β_1^x + α_2β_2^x + α_3β_3^x \geq α_1 + α_2 + α_3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $β_1^{α_1} \cdot β_2^{α_2} \cdot β_3^{α_3} = 1$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμες στο $x_o = 0$ με $f(0) = g(0)$. Αν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + ημx \leq g(x)$, να δειχθεί ότι $f΄(0) - g΄(0) = -1$.

8. Αν για τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $2f(x) \geq f(1) + f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f΄΄(x) = 0$ έχει λύση στο διάστημα (1, 2).

9. Να αποδειχθεί ότι $2x - \frac{x^2}{2} < 4\ln(x + 2) - 4\ln 2 < 2x$, για κάθε $x > 0$.

10. Να αποδειχθεί ότι $x^2 + x - ημx > 0$ για κάθε $x > 0$.

11. Να αποδειχθεί ότι $3x^2 - 4συνx + 4 > 0$ για κάθε $x > 0$.

12. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \left[0, \frac{π}{2}\right]$ είναι $x - \frac{x^3}{4} \leq ημx$.

13. Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, \frac{π}{3})$ είναι $εφx < \frac{3\sqrt{3}}{π}x$.

14. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f΄(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f΄΄(x) < f΄(x)$. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq e^x$.

15. Έστω $α \in \mathbb{R}$. Να δειχτεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $αx \leq e^{α-1} + \ln x^x$.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + λx + 1}{x^2 - 2x - 3}$, $λ \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί οι τιμές του $λ \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η f να έχει δύο, ένα και κανένα ακρότατο. Ακόμη να βρεθούν τα είδη των ακροτάτων.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν $0 < \alpha < \beta < e\sqrt{e}$, τότε να δείξετε ότι $f(\beta) < \dfrac{\beta\ln\alpha - \alpha\ln\beta}{\alpha^2\beta - \alpha\beta^2} < f(\alpha)$.

18. **α)** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f''(x) > 0$, τότε να δειχθεί ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(x) < 0$.
β) Έστω η συνεχής συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $g''(x) > 0$, τότε να δειχθεί ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει: $g(x) < g(\alpha) + (x - \alpha)\cdot\dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

19. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $[f(x)]^5 + 5[f(x)]^3 + f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν έχει ακρότατα.

20. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει ότι $3[f(x)]^3 + f(x) = xe^x - 2e^x + 2x$ για κάθε $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

21. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $2[f(x)]^3 + 5f(x) = ημx - x^2 - x$ για κάθε $x \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

22. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $4[f(x)]^5 + 3f(x) = ημx + 2x$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$. Έχει η f ακρότατα;

23. Αν $f(x) = x^2 - ημx + \alpha x + \beta$ να αποδειχθεί ότι η f δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές θέσεις τοπικών ακροτάτων, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

24. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x^4 + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές θέσεις τοπικών ακροτάτων.

25. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha(e^{x-\alpha} - x)$, $\alpha > 0$.
α) Να αποδειχθεί ότι η f για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ παρουσιάζει ένα τοπικό ακρότατο το οποίο είναι ολικό ελάχιστο της f.
β) Για ποια τιμή του α η ελάχιστη τιμή της f γίνεται η μέγιστη δυνατή;

26. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x\alpha\ln\alpha - \alpha^{x-1}$, $0 < \alpha < 1$.
α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ η f παρουσιάζει ένα τοπικό ακρότατο, το οποίο είναι ολικό μέγιστο της f.
β) Να βρεθεί το α ώστε η τιμή του ολικού μεγίστου της f να γίνει η ελάχιστη δυνατή.

27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x\ln\frac{x}{2\alpha+4}$ όπου $\alpha > 0$. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο το -4, να βρεθεί η θέση του ελαχίστου και το α.

28. Δίνονται τα σημεία Α(1, 1) και Β(2, 3). Να βρεθεί σημείο Μ του άξονα $x'x$ έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του Μ απ' τα Α, Β να είναι ελάχιστο. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος;

29. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο έχει εμβαδόν $1m^2$. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ώστε η υποτείνουσα να γίνει ελάχιστη.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο Α(3,0). Να βρεθεί σημείο Β της γραφικής παράστασης της f, ώστε η απόσταση ΑΒ να είναι ελάχιστη. Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι η ΑΒ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Β.

31. Έστω η συνάρτηση $f(x)= \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\frac{3}{2}, 0)$. Να βρεθεί σημείο Β της C_f που απέχει απ' το Α τη μικρότερη απόσταση. Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της C_f, στο Β είναι κάθετη στην ΑΒ.

32. Μια πόρτα αποτελείται από ένα ημικύκλιο και ένα ορθογώνιο, Η διάμετρος του ημικυκλίου είναι ίση με τη βάση της πόρτας. Αν η περίμετρος της πόρτας είναι 8m, να βρεθούν οι διαστάσεις της ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να γίνει μέγιστο.

33. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, $\hat{\Gamma} = 30°$ και ΒΓ = 3m. Έστω Μ ένα σημείο της πλευράς ΒΓ και ΒΜ = x. Αν MM_1 και MM_2 είναι οι αποστάσεις του Μ απ' τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να βρεθεί το x, ώστε το γινόμενο $(MM_1)\cdot(MM_2)$ να γίνει μέγιστο.

34. Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα πάνω στον άξονα κίνησης δίνεται απ' τη συνάρτηση $S(t) = (30t - 3t^2)$m, όπου t ο χρόνος σε sec και $0 \le t \le 10$.
α) Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του κινητού την τυχαία χρονική στιγμή t.

β) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του S(t) και πότε συμβαίνει αυτό;

35. Η τιμή πώλησης κάθε μονάδας ενός προϊόντος είναι Π(x) = 32.250 - 3x, όπου x το πλήθος των μονάδων παραγωγής. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 1.500 δρχ. και ο φόρος που επιβάλλεται για μια μονάδα είναι 750 δρχ. Να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παραχθούν, ώστε να έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος.

36. Θεωρούμε τις ευθείες $ε_1$: y = x και $ε_2$: x + 2y - 6 = 0, x > 0. Δυο κορυφές ενός ορθογωνίου βρίσκονται πάνω στον άξονα x΄x, μια πάνω στην $ε_1$ και η τέταρτη πάνω στην $ε_2$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου, ώστε το εμβαδόν του να γίνει μέγιστο.

37. Η μείωση της ποσότητας μιας ουσίας Α σε ένα δοχείο δίνεται απ' τον τύπο $f(x) = x^2 - x^3$, όπου x η ποσότητα μιας δεύτερης ουσίας Β που ρίχνουμε στο δοχείο σε mgr και $0 < x < \frac{3}{2}$. Να βρεθεί ποια είναι η ποσότητα της ουσίας Β ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της ουσίας Α να γίνει μέγιστος.

38. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου Α(1, 13) από την παραβολή $y^2 = \frac{1}{3}x$.

39. Θεωρούμε τα εγγεγραμμένα σε ημικύκλιο ακτίνας ρ τραπέζια, των οποίων η μεγάλη βάση είναι η διάμετρος του ημικυκλίου. Να βρείτε εκείνο το τραπέζιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

40. Από όλα τα ορθογώνια εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας ρ να βρείτε εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν.

41. Μια ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας του ασθενή δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = x^3 - \frac{x^4}{6}$, $0 < x < 4$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού έτσι, ώστε ο ρυθμός μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x να γίνει μέγιστος.

42. Το κόστος της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης ενός κινητού δίνεται από τη συνάρτηση $K(υ) = \frac{1}{10}υ^2 + 2υ + 1000$ δρχ/ώρα, όπου υ είναι η ταχύτητα του κινητού ανά ώρα. Να βρεθεί η ταχύτητα που πρέπει να έχει το κινητό έτσι ώστε να καλύψει απόσταση S km με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

43. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση: $f(t) = \frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$, όπου A ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t) από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι είναι $K(0) = 0$.
Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

44. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ και $g(x) = \alpha x + 1$, $\alpha > 0$.
α) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων.
β) Αν Α, Β είναι τα κοινά τους σημεία, τότε να βρεθεί το α, ώστε η απόσταση (ΑΒ) να είναι η ελάχιστη δυνατή και να υπολογιστεί.

45. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Με βάσεις τις ΑΒ και ΓΔ κατασκευάζουμε εξωτερικά δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΡ και ΓΔΣ, με τις γωνίες των βάσεων τους α. Αν η περίμετρος του εξαγώνου ΑΡΒΓΣΔ είναι 2Ρ, υπολογίστε τις πλευρές του ορθογωνίου, ώστε το εμβαδό του εξαγώνου να είναι μέγιστο.