ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμοί

α) (Κατακόρυφη ασύμπτωτη)
Αν ένα τουλάχιστον απ' τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$, ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β) (Οριζόντια ασύμπτωτη)
Η ευθεία $y = \ell$ ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$), όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (ή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$).

γ) (Πλάγια ασύμπτωτη)
Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$) αν $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ (ή $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$).

Θεώρημα (για τις πλάγιες ασύμπτωτες)

α) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αν και μόνο αν
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$.

β) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αν και μόνο αν
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$.

Παρατηρήσεις

1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχει ασύμπτωτες.

2. Κάθε ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά 2 βαθμούς απ' τον βαθμό του παρονομαστή δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

3. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη αν $\lambda = 0$. Δηλαδή, οι οριζόντιες ασύμπτωτες μπορούν να βρεθούν και από το θεώρημα των πλάγιων ασύμπτωτων.

Επομένως, μπορούμε να αναζητούμε μόνο κατακόρυφες και πλάγιες ασύμπτωτες. Όταν όμως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη υπολογίζεται πιο εύκολα με τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης (ένα όριο) απ' ότι με το θεώρημα της πλάγιας ασύμπτωτης (δύο όρια).

4. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ μια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (οριζόντια ή πλάγια). Το ίδιο ισχύει και στο $-\infty$.

5. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα ή συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

6. Για να έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη η γραφική παράσταση μιας συνάρτηση f στο $+\infty$, θα πρέπει η f να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$. Αντίστοιχα για να έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη η C_f στο $-\infty$, θα πρέπει η f να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Υπολογισμός ασύμπτωτων

α) Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε στα άκρα διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f δεν ορίζεται και στα σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.

Αν x_0 είναι ένα από τα παραπάνω σημεία, τότε υπολογίζουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. Αν ένα τουλάχιστον από αυτά είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β) Οριζόντιες ασύμπτωτες

Οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Αν αυτό ισούται με πραγματικό αριθμό ℓ, τότε η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ομοίως εργαζόμαστε στο $-\infty$.

γ) Πλάγιες ασύμπτωτες

Πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και αν είναι πραγματικός αριθμός λ, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - \lambda x]$. Αν και το τελευταίο όριο είναι πραγματικός αριθμός β, τότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Αν κάποιο από τα προηγούμενα όρια δεν είναι πραγματικός αριθμός, τότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ομοίως εργαζόμαστε στο $-\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{9x^2 + x + 1}$

β) $g(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$

γ) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+2}, & x < -2 \\ \dfrac{x^4+x}{x^2+1}, & x \geq -2 \end{cases}$.

<u>Λύση</u>

α) Κατακόρυφες Ασύμπτωτες:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ρίζα πολυωνυμικής συνάρτησης.

Επομένως η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Πλάγιες - Οριζόντιες Ασύμπτωτες:

- **Στο $+\infty$:**

Για κάθε x > 0 είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{9+0+0} = 3 = \lambda$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{9x^2+x+1}-3x] =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{9x^2+x+1}-3x)(\sqrt{9x^2+x+1}+3x)}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{9x^2+x+1})^2-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+x+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3} = \dfrac{1}{6}$.

Άρα η ευθεία $y = 3x + \dfrac{1}{6}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- **Στο $-\infty$:**

Για κάθε x < 0 είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -\sqrt{9+0+0} = -3 = \lambda$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{9x^2+x+1}+3x] =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+x+1}+3x)(\sqrt{9x^2+x+1}-3x)}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+x+1})^2-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+x+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)} = -\frac{1}{6} = \beta.$$

Άρα η ευθεία $y = -3x - \frac{1}{6}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β) Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}^*$.

Κατακόρυφες Ασύμπτωτες:

$\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(2x + \frac{1}{x^2}) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^2} = +\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(2x + \frac{1}{x^2}) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty$.

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

Πλάγιες - Οριζόντιες Ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(2+\frac{1}{x^3}) = 2 = \lambda, \text{ αφού } \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^3} = 0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[g(x)-\lambda x] = \lim_{x\to\pm\infty}(2x+\frac{1}{x^2}-2x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2} = 0 = \beta.$$

Άρα η ευθεία $y = 2x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Σημείωση: Δεν αναζητούμε οριζόντιες ασύμπτωτες, αφού βρήκαμε ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Άλλωστε αν υπήρχε οριζόντια ασύμπτωτη θα τη βρίσκαμε με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε.

γ) Κατακόρυφες Ασύμπτωτες:

Η h είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, +\infty)$ ως ρητή σε καθένα από αυτά. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής στο $x_o = -2$.

$\lim\limits_{x\to-2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to-2^-}\frac{2x+3}{x+2} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-2^-}(2x+3) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2) = 0$ και $x + 2 < 0$ για κάθε $x < -2$.

$$\lim_{x\to -2^+} h(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^4+x}{x^2+1} = \frac{14}{5}.$$

Επομένως η h δεν είναι συνεχής στο x_0 = -2 και επειδή $\lim_{x\to -2^-} h(x) = +\infty$, η ευθεία x = -2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

Οριζόντιες Ασύμπτωτες:

- **Στο $-\infty$:**

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+3}{x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

Άρα η ευθεία y = 2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Πλάγιες Ασύμπτωτες:

- **Στο $+\infty$:**

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^4+x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty.$$

Άρα η C_h δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Σημείωση: Για την πλάγια ασύμπτωτη, θα μπορούσαμε να πούμε ότι για x > -2 η h είναι ρητή με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο από το βαθμό του παρονομαστή κι επομένως δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.
Επίσης, επειδή η h για x < -2 είναι ρητή με ίδιο βαθμό αριθμητή και παρονομαστή, έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

Να βρεθούν οι αριθμοί α, $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία y = -x + 2 να είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x) = \frac{(\alpha-1)x^3+\beta x^2-1}{2x^2+1}$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι η ευθεία y = -x + 2 πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ του διαγράμματος της συνάρτησης f, θα πρέπει $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ και $\lim_{x\to +\infty} [f(x)+x] = 2$.

Είναι $\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{(\alpha-1)x^3+\beta x^2-1}{2x^2+1}}{x} = \frac{(\alpha-1)x^3+\beta x^2-1}{2x^3+x}$.

- Αν α = 1, τότε ο αριθμητής είναι μικρότερου βαθμού πολυώνυμο από τον παρονομαστή κι επομένως $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

- Αν $\alpha \neq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^3+\beta x^2-1}{2x^3+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^3}{2x^3} = \frac{\alpha-1}{2}$.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{2} = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1$.

Είναι $f(x) + x = \frac{-2x^3+\beta x^2-1}{2x^2+1} + x = \frac{-2x^3+\beta x^2-1+2x^3+x}{2x^2+1} = \frac{\beta x^2+x-1}{2x^2+1}$.

- Αν $\beta = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$.
- Αν $\beta \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\beta x^2+x-1}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\beta x^2}{2x^2} = \frac{\beta}{2}$.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x] = 2 \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} = 2 \Leftrightarrow \beta = 4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $(-\infty, 0)$, για τις οποίες ισχύει $f(x) - g(x) = \frac{2x^2+1}{x-2}$, για κάθε $x < 0$. Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 3$, να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

Λύση

Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 3$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

Είναι $g(x) = -\frac{2x^2+1}{x-2} + f(x)$.

Για κάθε $x < 0$, είναι $\frac{g(x)}{x} = -\frac{2x^2+1}{x^2-2x} + \frac{f(x)}{x}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2} = 2$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}[-\frac{2x^2+1}{x^2-2x} + \frac{f(x)}{x}] = -2 + 0 = -2 = \lambda$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x) + 2x] = \lim\limits_{x\to-\infty}[-\frac{2x^2+1}{x-2} + f(x) + 2x] =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{-2x^2-1+2x^2-4x}{x-2} + f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{-4x-1}{x-2} + f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

$-4 + \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4 + 3 = -1 = \beta$.

Άρα η ευθεία $y = -2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+\alpha x+\beta}$ να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες x = 1 και x = 3.

Λύση

Επειδή η f είναι συνεχής ως ρητή, θα αναζητήσουμε κατακόρυφες εφαπτομένες στα άκρα των ανοιχτών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της.
Επομένως απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι οι ευθείες x = 1 και x = 3 κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f, είναι να μην ορίζεται η f στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$.
Αυτό συμβαίνει όταν ο παρονομαστής μηδενίζεται για x = 1 και x = 3.
Έτσι έχουμε: $1^2 + \alpha + \beta = 0$ και $3^2 + 3\alpha + \beta = 0$.
Από το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων βρίσκουμε α = -4 και β = 3.
Πράγματι για α = -4 και β = 3 η f έχει τύπο: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.
Επομένως οι ευθείες x = 1 και x = 3 είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f και οι τιμές α = -4 και β = 3 είναι δεκτές.

Άλλα παραδείγματα Β΄ ομάδας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε το x_o να είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f και το σημείο $A(x_o, 2)$ της C_f να βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Λύση

Πρώτα θα βρούμε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.
Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{2\}$.
Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+2}{x-2} = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+2) = 6 > 0$, $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2) = 0$

και x - 2 < 0 για x < 2.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+2}{x-2} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+2) = 6 > 0$, $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$

και x - 2 > 0 για x > 2.

Άρα η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Δηλαδή ισχύει ότι $x_o = 2$ αφού το $A(x_o, 2)$ βρίσκεται στην ευθεία x = 2.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - \alpha$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο για $x_o = 2$ πρέπει $f'(2) = 0$ ή $4 - \alpha = 0$ ή $\alpha = 4$.

Επίσης πρέπει f(2) = 2 αφού το A(2, 2) είναι σημείο της C_f.

Δηλαδή $4 - 2\alpha + \beta = 2$ ή $4 - 8 + \beta = 2$ ή $\beta = 6$.

Πράγματι για α = 4, β = 6 εύκολα αποδεικνύεται ότι στο A(2, 2) η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$, η οποία έχει ασύμπτωτη την ευθεία y = 3x - 2. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x] = -2$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

γ) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{xf(x)-3x^2+5}{f(x)+x-1}$ έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -\dfrac{1}{2}$.

Λύση

α) Αφού, η ευθεία y = 3x - 2 είναι ασύμπτωτη της C_f θα είναι:

$\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 3$ και $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x] = -2$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 3$.

Έστω $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$.

Τότε $f(x) = xh(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3 > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Πράγματι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ = $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf(x)-3x^2+5}{f(x)+x-1}$ = (διαιρούμε με x) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)-3x+\dfrac{5}{x}}{\dfrac{f(x)}{x}+1-\dfrac{1}{x}}$ =

$\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}+1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}}$ = $\dfrac{-2+0}{3+1-0}$ = -$\dfrac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδα

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ **β)** $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 2}{x-1}$

γ) $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ **δ)** $f(x) = σφx,\ x \in (0, π)$

ε) $f(x) = \begin{cases} x+5, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$ **στ)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

ζ) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **η)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

θ) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \le 1 \\ \dfrac{-x^2 - 5}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ **ι)** $f(x) = \dfrac{ημx}{συν^2 x},\ x \in \left(-\dfrac{π}{2}, \dfrac{π}{2}\right)$.

2. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 5}{x^2 + x + 1}$ **β)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 5}{-x^2 + x - 1}$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + x$ **δ)** $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$

ε) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4}$ **στ)** $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$

ζ) $f(x) = \dfrac{ημx}{x}$ **η)** $f(x) = \dfrac{συνx}{x}$.

3. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x-2}$ **β)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x-1}$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ **δ)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$

ε) $f(x) = \dfrac{συνx}{x}$ **στ)** $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$

ζ) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ **η)** $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x+1}$

θ) $f(x) = \dfrac{5|x| - x + 2}{x-1}$ **ι)** $f(x) = \dfrac{2(|x| - x) - 5}{x-1}$

ια) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ **ιβ)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{3x^2 + x + 2}$

4. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία y = 2x + 5 να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ όταν $f(x) = \dfrac{(\alpha - 2)x^3 + (\beta - 1)x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

5. Να βρεθούν τα α, β με α > 0, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία y = x + 2 να είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + 5}$ στο $+\infty$.

6. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ έχει δύο ασύμπτωτες οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x + 1}{x - 2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα α, β ώστε η ευθεία y = x - 1 να είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

8. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[\dfrac{3x^2 + x + 1}{x - 1} - \alpha x - \beta\right] = 0$.

9. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\alpha x + \beta - \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x - 2}\right] = 0$.

<u>Β΄ ομάδα</u>

1. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^2 + \alpha x + \beta}$ να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες x = 1 και x = 2. Στη συνέχεια να βρεθούν και οι υπόλοιπες ασύμπτωτες της C_f.

2. Έστω ότι η ευθεία y = 3x + 2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α) Να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - 3x]$.

β) Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\lambda f(x) + 5x}{2xf(x) - 6x^2 + 4x} = 1$.

3. Έστω ότι η ευθεία y = x - 1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ αν ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2 + 1}\cdot f(x) + 3\mu x^2 + \sqrt{4x^2 + 3} + 2}{x^2 f(x) - x^3 + \sqrt{9x^4 + x^2} + 5} = \dfrac{3}{2}$.

4. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+2x+4}-(\alpha x+\beta)] = 0$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \dfrac{2x^2-5}{x^2+1}$. Να βρεθούν τα α, β ώστε το σημείο $A(1, f(1))$ να είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και να βρίσκεται πάνω στην οριζόντια ασύμπτωτη της C_g.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x-1}$. Να βρεθούν τα α, β ώστε το σημείο $A(x_o, 0)$ να είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και να βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$. Να βρεθούν τα α, β ώστε το $x_o = -2$ να είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f και το σημείο $A(-2, f(-2))$ να βρίσκεται πάνω στην ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

8. **α)** Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ισχύει $2f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.
β) Αν για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $xg(x) + g(-x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις ασύμπτωτες της g.

9. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{x^2+1}{f(x)}$, όπου f(x) είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση. Αν η ευθεία y = 1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ και $f'(0) = 2$, να βρείτε το πολυώνυμο f(x).

10. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x), αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2+\lambda x+3}{P(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες x = 1 και x = 2 και ισχύει $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το λ;

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^{-x}$συνx.
α) Να βρεθεί η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
β) Να δειχθεί ότι η ασύμπτωτη που βρέθηκε έχει άπειρα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να είναι: $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{2004+|x-y|}$. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

13. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $2x + 3 \leq f(x) \leq \dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να εξεταστεί αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$ για κάθε $x < 0$. Αν η ευθεία $y = -2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f να βρεθεί ο τύπος της f.