# ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## Ορισμός εφαπτομένης καμπύλης

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o$, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ την ευθεία που διέρχεται απ' το A και έχει κλίση την παράγωγο της f στο $x_o$. Δηλαδή, την ευθεία ε με εξίσωση: $y - f(x_o) = f\,'(x_o)(x - x_o)$.
Την κλίση $f'(x_o)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_o, f(x_o))$ θα τη λέμε και κλίση της $C_f$ στο A ή κλίση της f στο $x_o$.

## Ορισμός κατακόρυφης εφαπτομένης

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o$ και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=+\infty$ (ή $-\infty$)
- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=-\infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=+\infty$,

τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_o$.

## Παρατηρήσεις

**1.** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $M(x_o, f(x_o))$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, αν και μόνο αν $f\,'(x_o) = \lambda$.

**2.** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $M(x_o, f(x_o))$ είναι κάθετη στην ευθεία ε που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, αν και μόνο αν $\lambda \cdot f\,'(x_o) = -1$.

3. Αν ω, με $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $M(x_o, f(x_o))$ με τον άξονα x΄x, τότε $εφω = f΄(x_o)$.

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

**ΜΕΘΟΔΟΣ 1η**

Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $x_o$.

- Για να έχουν οι $C_f$, $C_g$, κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $M(x_o, f(x_o))$, αρκεί $f(x_o) = g(x_o)$ και $f΄(x_o) = g΄(x_o)$.
- Για να έχουν οι $C_f$, $C_g$, εφαπτομένες κάθετες στο κοινό τους σημείο $M(x_o, f(x_o))$, αρκεί $f(x_o) = g(x_o)$ και $f΄(x_o) \cdot g΄(x_o) = -1$.

**<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u>**

Να βρεθούν τα α, $\beta \in \Re$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - \alpha$, $g(x) = \sqrt{x+1} + \beta x$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο, το οποίο έχει τετμημένη x = 0.

**<u>Λύση</u>**

Τα πεδία ορισμού των f, g είναι $A = \Re$ και $B = [-1, +\infty)$, αντίστοιχα.
Για κάθε $x \in \Re$: $f΄(x) = 2x$
Για κάθε $x > -1$: $g΄(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \beta$.
Αφού για x = 0 οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινό σημείο, πρέπει $f(0) = g(0)$ ή $0^2 - \alpha = \sqrt{0+1} + \beta \cdot 0$ ή $\alpha = -1$.
Επίσης, πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων των $C_f$, $C_g$ στο σημείο με τετμημένη x = 0 να είναι ίσοι.
Άρα, $f΄(0) = g΄(0)$ ή $2 \cdot 0 = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} + \beta$ ή $\beta = -\frac{1}{2}$.

**☞ ΜΕΘΟΔΟΣ 2η**

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της $Α(α, f(α))$, εργαζόμαστε ως εξής:

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x = α, εφαρμόζουμε τον τύπο $y - f(α) = f΄(α)(x - α)$.
- Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = α, βρίσκουμε τα όρια $\lim\limits_{x \to α^+} \frac{f(x)-f(α)}{x-α}$, $\lim\limits_{x \to α^-} \frac{f(x)-f(α)}{x-α}$. Αν αυτά είναι $+\infty$ ή $-\infty$ και η f είναι συνεχής στο σημείο x = α, τότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η κατακόρυφη ευθεία x = α.

**<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>**

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-1} - 2x + 3$ στο σημείο $x_o = 1$.

**<u>Λύση</u>**

Η f έχει πεδίο ορισμού το $Α = [1, +\infty)$.
Στο σημείο $x_o = 1$ πρέπει να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη με τον ορισμό:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}-2x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}-2\cdot\frac{x-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}-2\right) =$$
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}{(x-1)\cdot\sqrt{x-1}}-2\right) = \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-2\right) = +\infty.$$

Επίσης, η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
Επομένως, ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_o = 1$ και είναι η ευθεία x = 1.

**☞ ΜΕΘΟΔΟΣ 3η**

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ που διέρχεται απ' το σημείο Α(α, β) που δεν ανήκει στην $C_f$, ($f(α) \neq β$), βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο τυχαίο σημείο της $Μ(x_o, f(x_o))$ και απαιτούμε αυτή να επαληθεύεται για x = α και y = β.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι εφαπτομένες της $C_f$ που διέρχονται από το σημείο Γ(2, -9).

**Λύση**

Επειδή $f(2) = 4 - 10 + 6 = 0 \neq -9$, το σημείο Γ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
Για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ είναι $f'(x) = 2x - 5$.
Η εφαπτομένη της $C_f$ στο τυχαίο σημείο της $M(x_o, f(x_o))$ έχει εξίσωση:
ε: $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$ ή $y - (x_o^2 - 5x_o + 6) = (2x_o - 5)(x - x_o)$ ή
$y = 2xx_o - 5x - x_o^2 + 6$.
Η ε διέρχεται από το σημείο Γ(2, -9) κι επομένως πρέπει να ισχύει:
$-9 = 2 \cdot 2 \cdot x_o - 5 \cdot 2 - x_o^2 + 6$ ή $x_o^2 - 4x_o - 5 = 0$. Άρα $x_o = -1$ ή $x_o = 5$.
Για $x_o = -1$ έχουμε την εφαπτομένη $y = -7x + 5$.
Για $x_o = 5$ έχουμε την εφαπτομένη $y = 5x - 19$.

> **ΜΕΘΟΔΟΣ 4η**
> Για να είναι μία ευθεία ε εφαπτομένη της $C_f$, αρκεί η ε και η $C_f$ να έχουν κοινό σημείο στο οποίο η παράγωγος της f να είναι ίση με το συντελεστή διεύθυνσης της ε.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4**

Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, ώστε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(1, 3) και Β(-1, 1) να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 3\alpha x + \beta$ στο σημείο Α(1, 3).

**Λύση**

Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{1-3}{-1-1} = \dfrac{-2}{-2} = 1$.
Άρα, η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y - 3 = x - 1$ ή $y = x + 2$.
Για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ είναι $f'(x) = 2x + 3\alpha$.
Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο Α πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = 1$.

Άρα, $f'(1) = 1$ ή $2 + 3α = 1$ ή $α = -\frac{1}{3}$.

Το σημείο Α(1, 3) πρέπει να είναι σημείο και της $C_f$.

Άρα, $f(1) = 3$ ή $1 + 3α + β = 3$ ή $3\cdot(-\frac{1}{3}) + β = 2$ ή $β = 3$.

**ΜΕΘΟΔΟΣ 5η**

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $M(x_o, f(x_o))$ είναι:

- παράλληλη στον άξονα x΄x, αν και μόνο αν $f'(x_o) = 0$.
- παράλληλη στη διχοτόμο του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου (γωνίες $x\hat{O}y$, $x'\hat{O}y'$), αν και μόνο αν $f'(x_o) = 1$.
- παράλληλη στη διχοτόμο του 2ου και του 4ου τεταρτημορίου (γωνίες $x'\hat{O}y$, $x\hat{O}y'$), αν και μόνο αν $f'(x_o) = -1$.

**<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5</u>**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2αx - 1) + 2(αx)^2$, όπου $α > 0$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

**<u>Λύση</u>**

Για κάθε $x > \frac{1}{2α}$: $f'(x) = \frac{1}{2αx-1}\cdot(2αx-1)' + 2\cdot 2αx\cdot(αx)' = \frac{1}{2αx-1}\cdot 2α + 4αx\cdot α$

$= \frac{2α}{2αx-1} + 4α^2x$.

Αν υπήρχε σημείο $M(x_o, f(x_o))$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να ήταν παράλληλη στον άξονα x΄x, θα είχαμε: $f'(x_o) = 0$ ή

$\frac{2α}{2αx_o - 1} + 4α^2x_o = 0$ ή $2α + 4α^2x_o(2αx_o - 1) = 0$ ή $2α + 8α^3x_o^2 - 4α^2x_o = 0$ ή

$2α(1 + 4α^2x_o^2 - 2αx_o) = 0$ ή $4α^2x_o^2 - 2αx_o + 1 = 0$.

Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη, αφού $Δ = 4α^2 - 16α^2 = -12α^2 < 0$.

Άρα, δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

**Άλλα παραδείγματα Β΄ ομάδας**

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\ln(x-3)}{x-3}$ και $g(x) = x^2 + 3x + α$, $α \in \Re$. Να βρείτε για ποια τιμή του α η εφαπτομένη της $C_f$ στο $A(4, f(4))$ εφάπτεται και της $C_g$.

### Λύση

Για κάθε $x > 3$ είναι: $f΄(x) = \dfrac{\frac{1}{x-3}(x-3)-\ln(x-3)}{(x-3)^2} = \dfrac{1-\ln(x-3)}{(x-3)^2}$.

$f΄(4) = \dfrac{1-\ln(4-3)}{(4-3)^2} = 1$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $A(4, 0)$ είναι:

ε: $y - f(4) = f΄(4)(x - 4)$ ή $y - 0 = x - 4$ ή $y = x - 4$.

Για κάθε $x \in \Re$ είναι: $g΄(x) = 2x + 3$.

Για να είναι η ευθεία ε εφαπτομένης της $C_g$ στο σημείο της $M(x_o, g(x_o))$, θα πρέπει

$$\begin{cases} g(x_o) = x_o - 4 \\ g'(x_o) = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_o^2 + 3x_o + α = x_o - 4 \\ 2x_o + 3 = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 1 - 3 + α = -1 - 4 \\ x_o = -1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} α = -3 \\ x_o = -1 \end{cases}.$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - αx + β$ και λ, μ με $λ > μ$ οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Αν είναι γνωστό ότι οι εφαπτομένες της $C_f$ στα σημεία $A(λ, 0)$ και $B(μ, 0)$ τέμνονται κάθετα, να αποδείξετε ότι: $λ - μ = 1$.

### Λύση

Για κάθε $x \in \Re$ είναι $f΄(x) = 2x - α$.

Ο συντελεστής της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $A(λ,0)$ είναι $λ_1 = f΄(λ) = 2λ - α$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $B(μ, 0)$ είναι $λ_2 = f΄(μ) = 2μ - α$.

Οι $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν $(2λ - α)(2μ - α) = -1$ ή

$4λμ - 2αμ - 2αλ + α^2 = -1$ (1).
Όμως $λ + μ = α$, διότι λ, μ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - αx + β = 0$.
Άρα, η (1) γράφεται διαδοχικά: $4λμ - 2(λ + μ)μ - 2(λ + μ)λ + (λ + μ)^2 = -1$ ή
$4λμ - 2λμ - 2μ^2 - 2λ^2 - 2λμ + λ^2 + 2λμ + μ^2 = -1$ ή $-λ^2 + 2λμ - μ^2 = -1$ ή
$λ^2 - 2λμ + μ^2 = 1$ ή $(λ - μ)^2 = 1$ ή $|λ - μ| = 1$.
Επειδή $λ > μ$, ισχύει ότι $λ - μ = 1$.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:
$f(\ln x) = e^{x-1} - \ln x - 1$ (1), για κάθε $x > 0$.
Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση εφάπτεται του άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων.

## Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ κι επομένως σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασής της ορίζεται εφαπτομένη.
Στη σχέση (1), για $x = 1$ έχουμε: $f(\ln 1) = e^0 - \ln 1 - 1$ ή $f(0) = 0$.
Με παραγώγιση της (1) προκύπτει:
$[f(\ln x)]' = (e^{x-1} - \ln x - 1)'$ ή $f'(\ln x)\cdot(\ln x)' = e^{x-1}(x - 1)' - \frac{1}{x}$ ή
$f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = e^{x-1} - \frac{1}{x}$ (2).
Στη σχέση (2), για $x = 1$ έχουμε: $f'(\ln 1) = e^0 - 1$ ή $f'(0) = 0$.
Άρα, η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της $O(0, 0)$ έχει εξίσωση
$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ή $y - 0 = 0x$ ή $y = 0$, δηλαδή είναι ο άξονας x΄x.

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α΄ ομάδα**

**1.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$, όταν:

**α)** $f(x) = 2x^2 + 3x - 5,\ x_o = 2$ **β)** $f(x) = 3\eta\mu 2x - 1,\ x_o = \frac{\pi}{4}$

**γ)** $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1},\ x_o = 1$ **δ)** $f(x) = \sqrt{x-4},\ x_o = 5$

**ε)** $f(x) = x\ln x,\ x_o = e$ **στ)** $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1},\ x_o = 0$

**ζ)** $f(x) = e^x\sqrt{x},\ x_o = 1.$

**2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ με $f(x) = 3x^2 - x + 5$ που είναι κάθετη στην ευθεία $x - y - 5 = 0$.

**3.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ με $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $5x - y + 10 = 0$.

**4.** Να βρεθούν τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα x'x.

**α)** $f(x) = x^2 - 1$ **β)** $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

**γ)** $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ **δ)** $f(x) = x\ln x$

**ε)** $f(x) = xe^{2x}$ **στ)** $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

**ζ)** $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ **η)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

**5.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x(\ln x - 3)$ που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα x΄x.

**6.** Να βρεθεί (αν ορίζεται) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$, όταν:

**α)** $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \le 0 \\ x^3 - 2x^2 + x, & x > 0 \end{cases},\ x_o = 0,$

**β)** $f(x) = \begin{cases} xe^x + 5x, & x \le 0 \\ x^4 - 3x^2 + 6x, & x > 0 \end{cases},\ x_o = 0$

**γ)** f(x) = $\begin{cases} (x-1)\ln x, & x \geq 1 \\ 2x^3 - 3x^2 + 1, & x < 1 \end{cases}$, $x_o = 1$,

**δ)** f(x) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{x-3}, & x \geq 4 \\ -\dfrac{7}{4}x + 9, & x < 4 \end{cases}$, $x_o = 4$

**7.** Να βρεθεί (αν ορίζεται) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$, όταν:

**α)** $f(x) = \sqrt{x-5}$ , $x_o = 5$

**β)** $f(x) = 2\sqrt{x-2} - 1$ , $x_o = 2$

**γ)** $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 5$ , $x_o = 1$

**δ)** $f(x) = 3\sqrt{x-1} + x - 2$ , $x_o = 1$

**ε)** $f(x) = 3\sqrt[3]{x-2} + 2\sqrt{x-2}$ , $x_o = 2$.

**8.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = αx^3 - x^2 + βx + 1$, όπου $α, β \in \Re$. Να προσδιοριστούν τα α, β ώστε η $C_f$ να διέρχεται απ' το σημείο Α(2, 1) και η κλίση της εφαπτομένης της στο Α(2, 1) να είναι ίση με 6.

**Β΄ ομάδα**

**1.** Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $3x - y - 1 = 0$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 1$ δύο κοινά σημεία και σε ένα απ' αυτά εφάπτεται της $C_f$.

**2.** Να βρεθούν τα $α, β \in \Re$, ώστε οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + αx + β$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ στο κοινό τους σημείο Α(1, 1) να είναι κάθετες.

**3.** Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) + 1$ στο σημείο Α(0, 1) εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 3x + 5$.

**4.** Να προσδιοριστούν τα $α, β \in \Re$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = αx^2 + βx + 1$, $g(x) = e^{x-2} + 3\ln(x - 1)$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_o = 2$.

**5.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + x + 1$ η οποία άγεται από το σημείο Α(2, 6).

**6.** Να αποδειχθεί ότι απ' το σημείο Α(2, 3) διέρχονται τρεις ευθείες οι οποίες είναι εφαπτομένες στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 1$.

**7.** Έστω η συνάρτηση f(x) = $\frac{x}{x+1}$ . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται:
**α)** απ' το σημείο O(0, 0).
**β)** απ' το σημείο A(2, 2).

**8.** Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη τής γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = $x^{\ln x + x}$ στο σημείο A(1, 1) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x) = $x^2$ - 3x + 4.

**9.** Να βρεθούν τα α, β $\in \Re$, ώστε η ευθεία y = 3x - 1 να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = α$x^2$ + x + β στο σημείο με τετμημένη $x_o$ = 1.

**10.** Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου το πολύ βαθμού τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να εφάπτεται στις ευθείες $ε_1$: 5x + y - 3 = 0, $ε_2$: x - y - 1 = 0 στα σημεία A(0, 3), B(1, 0), αντίστοιχα.

**11.** **α)** Να βρεθεί ο μ $\in \Re$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της f με f(x) = μx - $\frac{1}{4}x^3$ σ' ένα κοινό της σημείο με τον άξονα x΄x να σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα αυτό.
**β)** Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη αυτή δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C.

**12.** Να βρεθεί ο α $\in \Re$ ώστε η ευθεία y = 9x - 14 να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f με f(x) = $x^3$ - 3αx + 2. Η εφαπτομένη αυτή έχει άλλα κοινά σημεία με τη C;

**13.** Να βρεθεί ο α > 0, ώστε η ευθεία y = x να είναι εφαπτομένη της καμπύλης με εξίσωση y = $α^x$.

**14.** Μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με f΄(x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in$ Δ. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με g(x) = $\frac{f(x)}{f'(x)}$ και ε η εφαπτομένη της C σ' ένα κοινό της σημείο με τον άξονα x΄x. Να δείξετε ότι η ε σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον x΄x.

**15.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x) = $\frac{x^2}{2}$ και

$g(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2x}$ εφάπτονται σ' ένα σημείο, ενώ οι εφαπτομένες αυτών σ' ένα άλλο κοινό τους σημείο είναι κάθετες.

**16.** Έστω οι συναρτήσεις f με $f(x) = x^3 - 2x + 2$ και g με $g(x) = x^3 - 3x + 2$.
**α)** Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία $M(x_o, f(x_o))$ και $P(x_o, g(x_o))$ τέμνονται στον άξονα y΄y.
**β)** Είναι δυνατόν οι εφαπτομένες αυτές να είναι κάθετες;

**17.** Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2$ $(\alpha \neq 0)$ και τα σημεία Α, Β της γραφικής παράστασης C της f με τετμημένες $x_1$, $x_2$, αντίστοιχα.
**α)** Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της C στα Α και Β τέμνονται σε σημείο Μ του άξονα y΄y αν και μόνο αν $x_1 = -x_2$.
**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Β, Μ ώστε το τρίγωνο ΑΒΜ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

**18.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$.
**α)** Να αποδείξετε ότι σε κάθε σημείο της $C_f$ ορίζεται εφαπτομένη, η οποία μάλιστα δεν μπορεί να είναι παράλληλη του άξονα x΄x.
**β)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε της $C_f$ στο τυχαίο σημείο της $M(x_o, f(x_o))$ και να βρεθούν τα σημεία τομής Α και Β της ε με τους άξονες x΄x και y΄y, αντίστοιχα.
**γ)** Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΑΒ έχει ως μέσο το Μ.
**δ)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ έχει σταθερό εμβαδόν.

**19.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $x + 2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 3x + 4$, για κάθε $x \in \Re$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (αν ορίζεται) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

**20.** Να βρεθούν τα α, β, $\gamma \in \Re$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 0 \\ \sqrt{x + \gamma}, & x > 0 \end{cases}$, να έχει στο σημείο με τετμημένη 0 εφαπτομένη που να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\dfrac{\pi}{3}$.

**21.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 2$. Να βρείτε τα α, $\beta \in \Re$, ώστε να υπάρχει ευθεία που να εφάπτεται της $C_f$ στα σημεία της με τετμημένες 0 και 1.

**22.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο $M(α, β)$ με $β < α^2$. Δείξτε ότι από το Μ μπορούμε να φέρουμε δυο εφαπτομένες στη γραφική παράσταση της f.

**23.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ευθείες $y = 1$, $x = 2$ και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ σε οποιοδήποτε σημείο της είναι σταθερό.

**24.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$.
**α)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο με τετμημένη $x = 0$.
**β)** Σε ποια σημεία οι εφαπτομένες της $C_f$ διέρχονται από την αρχή των αξόνων;
**γ)** Δείξτε ότι αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τη $C_f$ στα σημεία με τετμημένες α, β, τότε ισχύει $\ln\frac{α}{β} = α - β$.

**25.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\sqrt{α} - \sqrt{x}\right)^2$, $α > 0$. Αν η ευθεία ε είναι εφαπτομένη της $C_f$ στο τυχαίο σημείο της $M(x_o, f(x_o))$, τότε να δείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων της αρχής των αξόνων από τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες είναι σταθερό.