Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_o και συμβολίζεται με $f\,'(x_o)$.

Δηλαδή, $f\,'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

- Αν στην παραπάνω ισότητα θέσουμε $x = x_o + h$, τότε έχουμε:

$f\,'(x_o) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$.

- Αν συμβολίσουμε το $h = x - x_o$ με Δx, ενώ το $f(x_o + h) - f(x_o)$ με $\Delta f(x_o)$, ο παραπάνω τύπος γράφεται: $f\,'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_o)}{\Delta x}$.

- Επίσης κατά τον Leibniz η παράγωγος της f στο x_o συμβολίζεται:

$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_o}$ ή $\dfrac{df(x_o)}{dx}$.

Συνέπεια του ορισμού

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\Re$ τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o^-}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, $\lim\limits_{x\to x_o^+}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι ίσα.

Ορισμός εφαπτομένης καμπύλης

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ την ευθεία που διέρχεται απ' το Α και έχει κλίση την παράγωγο της f στο x_o. Δηλαδή, την ευθεία ε με εξίσωση: $y - f(x_o) = f\,'(x_o)(x - x_o)$.

Θεώρημα (Παράγωγος και Συνέχεια)

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παρατηρήσεις

1. Αν το $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ δεν υπάρχει ή η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$.

2. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o, βρίσκουμε το όριο $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$. Αν αυτό είναι πραγματικός αριθμός, τότε είναι ίσο με την $f'(x_o)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρεθεί αν ορίζεται η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x|x| - 2ημ5x - 1$ στο σημείο $x_o = 0$.

Λύση

Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x|x|-2ημ5x-1-(-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x|x|-2ημ5x}{x} =$
$\lim_{x\to 0}(\frac{x|x|}{x}-\frac{2ημ5x}{x}) = \lim_{x\to 0}(|x|-10\frac{ημ5x}{5x}) = \lim_{x\to 0}|x| - 10\lim_{x\to 0}\frac{ημ5x}{5x}$.

Στο δεύτερο όριο θέτουμε $u = 5x$ και έχουμε $\lim_{x\to 0}\frac{ημ5x}{5x} = \lim_{u\to 0}\frac{ημu}{u} = 1$.

Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}|x| - 10\lim_{x\to 0}\frac{ημ5x}{5x} = 0 - 10 = -10$. Δηλαδή, $f'(0) = -10$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

Για να βρούμε την παράγωγο μιας δίκλαδης συνάρτησης f στο σημείο x_o που αλλάζει ο τύπος της, βρίσκουμε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, $\lim\limits_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$. Αν αυτά είναι ίσα με τον ίδιο πραγματικό αριθμό, τότε αυτός ο αριθμός είναι ίσος με την $f'(x_o)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρεθεί αν ορίζεται η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}2x^2-2x+1\,, & x<1\\ x^3-x+1 & ,x\geq 1\end{cases}$ στο σημείο $x_o = 1$.

Λύση

Επειδή το σημείο $x_o = 1$ είναι σημείο στο οποίο η f αλλάζει τύπο, θα βρούμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ στο σημείο $x_o = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2x+1-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x(x-1)}{x-1} =$ $\lim\limits_{x\to 1^-}2x = 2$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-x+1-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x(x^2-1)}{x-1} =$ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}[x(x+1)] = 2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$, είναι και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$, δηλαδή $f'(1) = 2$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3η

Πολλές φορές για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο, αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν είναι συνεχής σ' αυτό το σημείο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να βρεθεί αν ορίζεται η παράγωγος της συνάρτησης
$f(x)=\begin{cases} x^4 - x & , x < 2 \\ x^3 + 4 - ημ(πx) & , x \geq 2 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Σ' αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-}(x^4 - x) = 2^4 - 2 = 14$,
ενώ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+}[x^3 + 4 - ημ(πx)] = 2^3 + 4 - ημ(2π) = 8 + 4 - 0 = 12$.
Επειδή $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ κι επομένως δεν μπορεί να είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ΜΕΘΟΔΟΣ $4^η$

Όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους που περιέχει μια δίκλαδη συνάρτηση, ώστε να είναι αυτή παραγωγίσιμη στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της, απαιτούμε πρώτα να είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθούν τα α, $β \in \Re$, ώστε η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + α, & x \leq 0 \\ x^3 + αx + β, & x > 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ θα πρέπει να είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$.
Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(x^2 + 2x + α) = α$.
Επίσης $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x^3 + αx + β) = β$.
$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + α = α$.
Πρέπει $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ ή $α = β = α$ ή $α = β$.

Για x < 0 είναι $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+2x+\alpha-\alpha}{x} = x + 2$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$ $\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2) = 2$.

Για x > 0 είναι $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3+\alpha x+\beta-\alpha}{x} = \frac{x^3+\alpha x+\alpha-\alpha}{x} = x^2 + \alpha$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+\alpha) = \alpha$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ή α = 2 και β = 2.

ΜΕΘΟΔΟΣ 5η

Αν θέλουμε να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης σε σημείο x_o και η συνάρτηση περιέχεται σε διπλή ανίσωση, τότε χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής για την εύρεση του ορίου $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο $\Re$, παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ με f(0) = 0 και $f'(0) = 5$. Αν $f(x) + 2 \le g(x) \le f(x) + x^4 + 2$ (1), να αποδειχθεί ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και να βρεθεί η $g'(0)$.

Λύση

Η (1) για x = 0 δίνει: $f(0) + 2 \le g(0) \le f(0) + 0^4 + 2$ ή $2 \le g(0) \le 2$, που σημαίνει ότι g(0) = 2.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 5$ ή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 5$.

Η (1) γίνεται: $f(x) \le g(x) - 2 \le f(x) + x^4$ ή $f(x) \le g(x) - g(0) \le f(x) + x^4$.

Για x > 0 έχουμε: $\frac{f(x)}{x} \le \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \le \frac{f(x)}{x} + x^3$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = 5$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}+x^3\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x\to 0^+}x^3 = 5 + 0 = 5$,

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 5$.

Για x < 0 έχουμε: $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \geq \frac{f(x)}{x} + x^3$.

Επειδή $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 5$ και $\lim_{x \to 0^-} (\frac{f(x)}{x} + x^3) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \to 0^-} x^3 = 5 + 0 = 5$,

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 5$.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ με $g'(0) = 5$.

Άλλα παραδείγματα Β΄ ομάδας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Δυο συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο R και για κάθε $x \in \Re$ είναι $g(x) = xf(x)$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 1$, να αποδείξετε ότι και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Λύση

Έχουμε $g'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{xf(x)-f(1)}{x-1}$. Έστω $h(x) = \frac{xf(x)-f(1)}{x-1}$, με $x \neq 1$ και $\lim_{x \to 1} h(x) = g'(1)$. Τότε, $xf(x) - f(1) = (x - 1)h(x)$ ή

$f(x) = \frac{(x-1)h(x)+f(1)}{x}$ για κάθε $x \neq 0, 1$.

Είναι $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{(x-1)h(x)+f(1)}{x} - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)h(x)+f(1)-xf(1)}{x(x-1)} =$

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)[h(x)-f(1)]}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{h(x)-f(1)}{x} = \lim_{x \to 1} h(x) - f(1) = g'(1) - f(1)$.

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Δίνεται συνάρτηση $f: \Re \to \Re$ με $f(x + y) = f(x)συνy + f(y)συνx$ για κάθε $x, y \in \Re$.
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x) = f'(0)συνx$ για κάθε $x \in \Re$.

Λύση

α) Η ισότητα $f(x + y) = f(x)συνy + f(y)συνx$ για $x = y = 0$ δίνει $f(0) = 2f(0)συν0$ ή $f(0) = 2f(0)$ ή $f(0) = 0$.
Άρα, η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.
β) Θα προσπαθήσουμε να βρούμε την παράγωγο της f σε ένα τυχαίο σημείο $x_o \in \Re$. Για $h \neq 0$ είναι: $\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = \frac{f(x_o)συνh + f(h)συνx_o - f(x_o)}{h} = \frac{f(h)}{h}συνx_o + f(x_o)\frac{συνh-1}{h}$.
Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, ισχύει ότι
$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$.
Επίσης, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h} = 0$.
Άρα, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot συνx_o + f(x_o)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h} =$
$f'(0)συνx_o + f(x_o)\cdot 0 = f'(0)συνx_o$.
Δηλαδή, $f'(x_o) = f'(0)συνx_o$.
Επειδή το x_o είναι τυχαίο, θα ισχύει: $f'(x) = f'(0)συνx$ για κάθε $x \in \Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδα

1. Να βρεθεί (αν ορίζεται) η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_o, όταν:

α) $f(x) = 2x + ημx, \quad x_o = 0$

β) $f(x) = x^3 + 1, \quad x_o = 1$

γ) $f(x) = ημ2x + x - 1, \quad x_o = 0$

δ) $f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad x_o = 2$

ε) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}, \quad x_o = 1.$

2. Να βρεθεί (αν ορίζεται) η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_o, όταν:

α) $f(x) = |x - 2|, \quad x_o = 1$

β) $f(x) = |x^2 - 2x|, \quad x_o = 1$

γ) $f(x) = x^2|x|, \quad x_o = 0$

δ) $f(x) = x|x| + ημ5x, \quad x_o = 0.$

3. Να βρεθεί (αν ορίζεται) η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_o, όταν:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \le 0 \\ x^3 + 2x + 2, & x > 0 \end{cases}, \quad x_o = 0$

β) $f(x) = \begin{cases} ημx, & x < 0 \\ x^2 + x, & x \ge 0 \end{cases}, \quad x_o = 0$

γ) $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad x_o = 0$

δ) $f(x) = \begin{cases} x^3 συν\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}, \quad x_o = 0$

ε) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xημx + x}{\sqrt{x+1} - 1}, & x \ne 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}, \quad x_o = 0.$

4. Να βρεθεί (αν ορίζεται) η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_o, όταν:

α) $f(x) = |x^2 - 5x|, \quad x_o = 5$

β) $f(x) = \sqrt{x-2} + x - 1, \quad x_o = 2$

γ) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$, $x_o = 1$
δ) $f(x) = x^2 + x + 1 + x\eta\mu|x|$, $x_o = 0$
ε) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x + x}{x+1}$, $x_o = 0$.

5. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $f(2 + h) = 4 + 10h + 2h^2 + h^3$ για κάθε $h \in \Re$, να αποδείξετε ότι:
α) $f(2) = 4$
β) $f'(2) = 10$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2x + \alpha^2, & x \le 1 \\ x^2 + 4\alpha x - 1, & x > 1 \end{cases}$.
α) Για ποιες τιμές του $\alpha \in \Re$ η f είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 1$;
β) Υπάρχουν τιμές του $\alpha \in \Re$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 1$;

<u>Β΄ ομάδα</u>

1. Αν $x^3 + 2x + 1 \le f(x) \le x^3 + x^2 + 2x + 1$, για κάθε $x \in \Re$, να αποδειχθεί ότι
α) $f(0) = 1$
β) $f'(0) = 2$.

2. Για τη συνάρτηση f ισχύει: $2\eta\mu x - x^4 \le f(x) \le 2\eta\mu x + 3x^4$, για κάθε $x \in \Re$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 0$ και να βρεθεί η $f'(0)$.

3. Έστω τρεις συναρτήσεις $f: \Re \to \Re$, $g: \Re \to \Re$, $h: \Re \to \Re$ για τις οποίες ισχύει ότι $g(x) \le f(x) \le h(x)$, για κάθε $x \in \Re$ και $f(0) = g(0) = h(0) = \alpha$. Αν οι συναρτήσεις g, h είναι παραγωγίσιμες στο $x_o = 0$ με $g'(0) = h'(0) = 2001$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και να βρεθεί η $f'(0)$.

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_o = 1$ και

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 3$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{x-1} = 12$ να βρεθούν:
α) το $f(1)$ και το $g(1)$
β) το $f'(1)$ και το $g'(1)$
γ) το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $x_o = 2$ με πεδίο ορισμού το $\Re$. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 3$ τότε:

α) να αποδειχθεί ότι $f(2) = 0$

β) να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $g(x) = (x^2 + x + 1)f(x)$ στο σημείο $x_o = 2$.

6. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $x_o = 3$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{x^2-9} = 4$.

α) Να βρεθεί το f(3)

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 3$ και να βρεθεί η $f'(3)$.

7. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x \le 1 \\ x^3+2\alpha, & x > 1 \end{cases}$, να βρεθούν οι τιμές των α, $\beta \in \Re$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

8. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2+\beta x+3, & x \le 1 \\ x^2+x+\alpha, & x > 1 \end{cases}$, να βρεθούν οι τιμές των α, $\beta \in \Re$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

9. Να βρεθούν τα α, β, $\gamma \in \Re$ ώστε η $f(x) = \begin{cases} x^2+\beta x+\gamma, & x \le 1 \\ x^3+2\alpha x+\beta, & x > 1 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και η γραφική της παράσταση να διέρχεται απ' το σημείο Α(0, 2).

10. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}+\alpha, & x < 0 \\ x^2+\beta x+\gamma, & x \ge 0 \end{cases}$ διέρχεται απ' το σημείο $A(-\dfrac{1}{2\pi}, 3)$, να βρεθούν τα α, β, $\gamma \in \Re$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

11. Έστω συνάρτηση f: $\Re \to \Re$, με $f(0) \neq 0$ και τέτοια ώστε για κάθε x, $y \in \Re$, να ισχύει $f(x + y) = f(x)f(y)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \Re$ με $f'(x) = f'(0)f(x)$.

12. Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $0 \in \Delta$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = f(|x|)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, αν και μόνο αν ισχύει $f'(0) = 0$.

13. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|f(x) - \alpha_1| \leq |g(x) - \alpha_2|$, όπου $\alpha_1 \in \mathbb{R}^*$ και $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές με $g(x_o) = \alpha_2$ και $g'(x_o) = 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o.