ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σ' αυτήν την ενότητα θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα εξής ερωτήματα:

- Πώς αποδεικνύουμε ότι μια εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση σ΄ ένα διάστημα;
- Πώς αποδεικνύουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μια λύση σ΄ ένα διάστημα;
- Πώς αποδεικνύουμε ότι μια εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση σ΄ ένα διάστημα;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

(Ύπαρξη τουλάχιστον μιας λύσης σε διάστημα)

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$ (αν δεν είναι σ' αυτήν τη μορφή τη φέρνουμε εμείς) έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα Δ υπάρχουν οι παρακάτω τρόποι:

α) Πολλές φορές κάποιοι αριθμοί είναι φανερό ότι είναι λύσεις της εξίσωσης. **Συνήθως** δοκιμάζουμε τους αριθμούς $x = 0$, $x = 1$. (Παράδειγμα 1)

β) Εφαρμόζουμε Θεώρημα **Bolzano** για την f στο Δ ή σε υποσύνολο του Δ. (Παράδειγμα 2)

γ) Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f στο Δ και αποδεικνύουμε ότι το 0 περιέχεται σ' αυτό. (Παράδειγμα 3)

δ) Εφαρμόζουμε Θεώρημα **Rolle** στο Δ για τη συνάρτηση g για την οποία ισχύει $f(x) = g'(x)$. (Παράδειγμα 4)

ε) Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι μια πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια λύση στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $5\ln x + ημ(\pi x) = x - 1$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ η παραπάνω εξίσωση δίνει: $5\ln 1 + ημ\pi = 1 - 1$ ή
$5\cdot 0 + 0 = 0$ ή $0 = 0$ που ισχύει.

Δηλαδή η εξίσωση έχει λύση την $x = 0$ κι επομένως έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x + ax = 0$, $0 < a < e$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{e}, 1)$.

Λύση

Έστω $f(x) = \ln x + ax$. Θα εφαρμόσουμε Θεώρημα Bolzano για την f διάστημα $[\frac{1}{e}, 1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\frac{1}{e}, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(\frac{1}{e}) = \ln\frac{1}{e} + a\frac{1}{e} = \ln e^{-1} + \frac{a}{e} = -1 + \frac{a}{e} = \frac{a-e}{e} < 0$

  $f(1) = \ln 1 + a = a > 0$.

Άρα $f(\frac{1}{e})f(1) < 0$ και σύμφωνα με το Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ ή $\ln x + ax = 0$ στο διάστημα $(\frac{1}{e}, 1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + 3^x + x = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Λύση

Έστω $f(x) = x^3 + 3^x + x - 1$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (x^3 + 3^x + x - 1)' = 3x^2 + 3^x\ln 3 + 1 > 0$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + 3^x + x - 1) = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + x - 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + 3^x + x - 1) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$.
Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.
Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, η εξίσωση $f(x) = 0$ ή $x^3 + 3^x + x = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^4 - 8x^3 - μx + μ = 0$, $μ \in \Re$, έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,2).

Λύση

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^5 - 2x^4 - μ\frac{x^2}{2} + μx$. Θα εφαρμόσουμε Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση g στο διάστημα [0, 2].

- Η g είναι συνεχής στο [0, 2] ως πολυωνυμική συνάρτηση.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2) με $g΄(x) = (x^5 - 2x^4 - μ\frac{x^2}{2} + μx)΄ =$

$5x^4 - 8x^3 - μx + μ$.

- $g(0) = 0^5 - 2\cdot 0^4 - μ\frac{0^2}{2} + μ0 = 0$.

$g(2) = 2^5 - 2\cdot 2^4 - μ\frac{2^2}{2} + 2μ = -2μ + 2μ = 0$. Άρα $g(0) = g(2)$.

Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0, 2] κι επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $g΄(x_o) = 0$ ή $5x_o^4 - 8x_o^3 - μx_o + μ = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $5x^4 - 8x^3 - μx + μ = 0$, $μ \in \Re$, έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,2).

☞ **ΜΕΘΟΔΟΣ 2η**

(το πολύ μια λύση σε διάστημα)

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής f(x) = 0 έχει το πολύ μια λύση στο διάστημα Δ υπάρχουν οι παρακάτω τρόποι:

α) Αποδεικνύουμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη** στο Δ. (Παράδειγμα 5)

β) Υποθέτουμε ότι η f έχει δύο λύσεις στο Δ τις $ρ_1$, $ρ_2$ με $ρ_1 < ρ_2$ και καταλήγουμε σε **άτοπο** εφαρμόζοντας **Θεώρημα Rolle** για την f στο διάστημα $[ρ_1, ρ_2]$. (Παράδειγμα 6)

γ) Πρέπει να γνωρίζουμε ότι μια πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού έχει το πολύ ν ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + x + \ln x = 3$ έχει το πολύ μια λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση

Έστω $f(x) = x^2 + x + \ln x - 3$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) = (x^2 + x + \ln x - 3)' = 2x + 1 + \frac{1}{x} > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ κι επομένως η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \ln x = 3$ έχει το πολύ μια λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Δείξτε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 - 36x + συνθ = 0$, $θ \in \Re$, έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση

Έστω $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + συνθ$.
Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις στο (0, 1) τις $ρ_1$, $ρ_2$ με $0 < ρ_1 < ρ_2 < 1$. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα Rolle για την f στο $[ρ_1, ρ_2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[ρ_1, ρ_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(ρ_1, ρ_2)$ με $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 36x + συνθ)' = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x + 2)(x - 3)$.
- $f(ρ_1) = f(ρ_2) = 0$, αφού οι $ρ_1$, $ρ_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ \in (ρ_1, ρ_2)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6(ξ + 2)(ξ - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; ξ = -2$ ή $ξ = 3$.
Επειδή $-2 \notin (0, 1)$, $3 \notin (0, 1)$ καταλήγουμε σε **άτοπο** κι επομένως η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 - 36x + συνθ = 0$, $θ \in \Re$, έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα (0,1).

☞ **ΜΕΘΟΔΟΣ 3η**
(μοναδική λύση σε διάστημα)
Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα Δ αποδεικνύουμε ότι έχει τουλάχιστον μια λύση στο Δ με έναν από τους 5 τρόπους της πρώτης μεθόδου και το πολύ μια λύση με έναν από τους 3 τρόπους της δεύτερης μεθόδου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Έστω η συνάρτηση $f : \left(\frac{π}{2}, \frac{3π}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = εφx - αx$, όπου α πραγματικός αριθμός με $α \le 1$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(\frac{π}{2}, \frac{3π}{2}\right)$.

Λύση

Για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x) = (\varepsilon\varphi x - ax)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - a = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - a =$
$\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - a = \varepsilon\varphi^2 a + 1 - a > 0$, αφού $\varepsilon\varphi^2 a \geq 0$, $1 - a \geq 0$ και η $\varepsilon\varphi^2 a$ μηδενίζεται όταν $a = \pi$, ενώ το $a - 1$ όταν $a = 1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \eta\mu x = 1 > 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και συνx < 0 για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Άρα $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\varepsilon\varphi x - ax) = -\infty$

Επίσης $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \eta\mu x = -1 < 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και συνx < 0 για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Άρα $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} (\varepsilon\varphi x - ax) = +\infty$

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ θα έχει σύνολο τιμών το

$(\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα κι επομένως η εξίσωση f(x) = 0 έχει το πολύ μια λύση στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Άρα έχει μοναδική λύση στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + x + \ln x = 2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι για x = 1 η εξίσωση δίνει $1 + 1 + \ln 1 = 2$ ή $2 = 2$ που ισχύει.
Επομένως η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση, αφού η x = 1 είναι μια λύση της.
Έστω $f(x) = x^2 + x + \ln x - 2$.
Για κάθε $x \in (0, +\infty)$: $f'(x) = (x^2 + x + \ln x - 2)' = 2x + 1 + \frac{1}{x} > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ κι επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$, την $x = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να δείξετε ότι η εξίσωση $8x^3 - 12x^2 - 6x + 5 = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

Έστω $f(x) = 8x^3 - 12x^2 - 6x + 5$.
Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$ εφαρμόζοντας θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα $[0, 1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.
- $f(0) = 5 > 0$
  $f(1) = 8 - 12 - 6 + 5 = -5 < 0$.

Άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$ κι επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (8x^3 - 12x^2 - 6x + 5)' = 24x^2 - 24x - 6 = 6(4x^2 - 4x - 1)$.
Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ κι επομένως η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση. Με δεδομένο όμως ότι έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$, έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x + 1 = x$ έχει μοναδική λύση.

Λύση

Έστω $f(x) = \ln x + 1 - x$, $x \in (0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε: $f'(x) = (\ln x + 1 - x)' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 1.$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0 Ο. Μ.	$\searrow$	

Επειδή $f(1) = 0$, η $x = 1$ είναι μια λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

- **Στο διάστημα (0, 1]** η f είναι γνησίως αύξουσα κι επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο $(-\infty, 0]$. Επειδή όμως η $x = 0$ είναι μια λύση της $f(x) = 0$, αυτή είναι μοναδική.
- Ομοίως **στο διάστημα $[1, +\infty)$** η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση της $x = 0$.

Επομένως η $x = 0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης στο $(0, +\infty)$.

Άλλα παραδείγματα Β΄ ομάδας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)e^x + 1$, όπου $\alpha < 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $(x - \alpha - 1)e^x + x = -e^\alpha + \alpha$ (1), έχει ακριβώς μια λύση, τη $x = \alpha$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = [(x - \alpha)e^x + 1]' = (x - \alpha)'e^x + (x - \alpha)(e^x)' =$
$e^x + (x - \alpha)e^x = (1 + x - \alpha)e^x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + x - \alpha)e^x = 0 \Leftrightarrow x = \alpha - 1.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1 + x - \alpha)e^x > 0 \Leftrightarrow x > \alpha - 1.$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$\alpha - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$1 - e^{\alpha-1}$ Ο. Ε.	$\nearrow$

Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο το $f(\alpha - 1) = (\alpha - 1 - \alpha)e^{\alpha - 1} + 1 =$ $-e^{\alpha - 1} + 1 > 0$ αφού $-e^{\alpha - 1} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{\alpha - 1} < 1 \Leftrightarrow e^{\alpha - 1} < e^0 \Leftrightarrow \alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow$ $\alpha < 1$ που ισχύει.

Άρα $f(x) \geq f(\alpha - 1) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση (1), για $x = \alpha$ δίνει: $(\alpha - \alpha - 1)e^{\alpha} + \alpha = -e^{\alpha} + \alpha \Leftrightarrow$ $-e^{\alpha} + \alpha = -e^{\alpha} + \alpha$, που ισχύει. Άρα η $x = \alpha$ είναι μια λύση της (1).

Έστω $g(x) = (x - \alpha - 1)e^x + x + e^{\alpha} - \alpha$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = [(x - \alpha - 1)e^x + x + e^{\alpha} - \alpha]' = e^x + (x - \alpha - 1)e^x + 1 =$ $(x - \alpha)e^x + 1 = f(x) > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ κι επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση. Έχει δηλαδή μοναδική λύση την $x = \alpha$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12</u>

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) + x\ln x = x$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(1, e)$.

<u>Λύση</u>

Έστω $g(x) = f(x) + x\ln x - x$, $x \in [1, e]$.

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την f στο $[1, e]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $g(1) = f(1) + \ln 1 - 1 = f(1) - 1 < 0$.

$g(e) = f(e) + e\ln e - e = f(e) + e - e = f(e) > 0$.

Άρα $g(1) \cdot g(e) < 0$ και σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο $(1, e)$.

Για κάθε $x \in (1, e)$: $g'(x) = [f(x) + x\ln x - x]' = f'(x) + (x)'\ln x + x(\ln x)' - 1 =$

$f'(x) + \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = f'(x) + \ln x > 0$, αφού $f'(x) \geq 0$ και $\ln x > 0$ στο $(1, e)$.

Επειδή η g είναι και συνεχής στο $[1, e]$ ως παραγωγίσιμη σ' αυτό, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο $(1, e)$. Δηλαδή έχει μοναδική λύση στο $(1, e)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου (η α είναι υποτείνουσα). Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha^x = \beta^x + \gamma^x$ (1) έχει μια μόνο πραγματική ρίζα.

Λύση

Η $x = 2$ είναι μια λύση της εξίσωσης (1), αφού σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Η εξίσωση $\alpha^x = \beta^x + \gamma^x$ γράφεται ισοδύναμα: $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x = 1$ ή $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1 = 0$.

Έστω $f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1\right]' = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x \ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) < 0$, αφού

$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x > 0$, $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x > 0$, $\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < 0$ και $\ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) < 0$, επειδή $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ και $\frac{\gamma}{\alpha} < 1$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ κι επομένως η (1) έχει το πολύ μια λύση στο $\mathbb{R}$. Επομένως έχει μοναδική λύση την $x = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + 6f(x) = x^3 + 3x - 5$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Λύση

Έστω $g(x) = x^3 + 3x - 5,\ x \in \mathbb{R}$. Θα εφαρμόσουμε Θεώρημα Bolzano για την g στο διάστημα $[1, 2]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική.
- $g(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 5 = -1 < 0$
  $g(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 - 5 = 9 > 0$.

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$ και σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_o) = 0$.
Η εξίσωση (1) για $x = x_o$ δίνει: $f^3(x_o) + 6f(x_o) = 0$ ή $f(x_o)[f^2(x_o) + 6] = 0$ ή $f(x_o) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση την $x = x_o$.
Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$[f^3(x) + 6f(x)]' = (x^3 + 3x - 5)'$ ή $3f^2(x)f'(x) + 6f'(x) = 3x^2 + 3$ ή $f'(x)[3f^2(x) + 6] = 3x^2 + 3$.
Επειδή $3f^2(x) + 6 > 0$ και $3x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ κι επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο (1, 2). Με δεδομένο όμως ότι έχει τουλάχιστον μια λύση σ' αυτό το διάστημα, έχει μοναδική λύση στο (1, 2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in [e, e^4]$. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (e, e^4)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = \frac{7}{4}$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένα $x_o \in (1, e)$ τέτοιο ώστε: $f(x_o) + x_o \ln x_o = x_o$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ημx + εφx - (x + 2)$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $3x^4 + 4x^3 = 12(x^2 - 1)$ έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + x^5$ και $g(x) = e^{-x} - x$. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x + 1)\cdot\ln x = \frac{x}{2}$ έχει μόνο μια λύση στο $(1, e)$.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $xe^x + \ln x = e$
β) $\ln(ημx) = x - \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} < x < \pi$.

8. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $2x + ημx = 0$.
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = συνx$ έχει δυο μόνο ρίζες.

9. Να αποδείξετε ότι:
α) ισχύει $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
β) η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μια λύση, την $x = 0$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + α$, $α \in \mathbb{R}$.

α) Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1 < x_2 < x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.
β) Αν $0 < α < 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (-1, 0).

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 + 3x^2 - 12x + 6α = 0$ έχει μια μόνο λύση στο διάστημα (-1, 2), όταν $-2 < α < -1$.

12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{2x} - 2x = 2x^2 + 1$ έχει μοναδική ρίζα.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$ και $g: (0, 1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν υπάρχουν $ρ_1, ρ_2 \in (0, 1)$ με $ρ_1 < ρ_2$ τέτοια, ώστε $g(ρ_1) = g(ρ_2) = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

14. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ ισχύει $\frac{κ}{1996} + \frac{λ}{2001} + \frac{μ}{1955} = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης $κx^{1995} + λx^{2000} + μx^{1954} = 0$ στο διάστημα (0, 1).

15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + μ = 0$, δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα (1, 2).

16. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1, 4] και παραγωγίσιμη στο (1, 4). Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (1, 4)$, ώστε $2x_o[f(4) - f(1)] = 15f'(x_o)$.

17. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x}{x+1} + \frac{e^x}{x-2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (-1, 1).

18. Για τους αριθμούς α, β ισχύουν $α^2 - 2β + 4 = 0$ και $α \neq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $α^2x^3 + βx + 1 - β = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0, 1).

19. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 + λx^2 + 6x - 5 = 0$, όπου $λ \in (-6, 6)$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

20. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) = συνx$ για κάθε $x \in [0, π]$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0, π).

21. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) + x^2 + 2x + 2 = g'(x) + 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν f(0) = g(0), να αποδείξετε ότι:

α) οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο,

β) οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους.

22. Αν x > 0 και α > 1, να λυθεί η εξίσωση $x^x = \alpha^{x+\alpha^2}$.

23. Να λυθεί η εξίσωση $e^x = 1 + \ln(x + 1)$.

24. Να αποδειχθεί ότι:

α) $1 + \ln(x + 1) \leq e^x$ για κάθε x > -1.

β) η εξίσωση $e^x - 1 = \ln(x + 1)$ έχει μοναδική λύση.