ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Ορισμοί

α) Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A.
Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in B$, όπου B ένα υποσύνολο του A, θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$, θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Έστω Γ το υποσύνολο του πεδίου ορισμού A, στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε, σε κάθε $x \in \Gamma$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το $f'(x)$. Έτσι ορίζεται μία νέα συνάρτηση που συμβολίζεται με f' ή με $\frac{df}{dx}$ και ονομάζεται πρώτη παράγωγος συνάρτηση της f ή παράγωγος της f.

γ) Έστω Γ το υποσύνολο του πεδίου ορισμού A, στο οποίο η f παραγωγίζεται, και έστω ότι η f' παραγωγίζεται σ΄ ένα υποσύνολο του Γ. Τότε ορίζεται η παράγωγος της f' που λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''.

- Επαγωγικά ορίζεται η νιοστή παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$.
Δηλαδή, $f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]'$, $\nu > 2$.

Κανόνες Παραγώγισης

α) παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει ότι: $(f + g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$.

β) παράγωγος γινομένου

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε και η συνάρτηση f.g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(fg)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$.

- Αν c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$, αφού $(c)' = 0$.

γ) παράγωγος πηλίκου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)\cdot g(x_o) - f(x_o)\cdot g'(x_o)}{[g(x_o)]^2}$

Θεώρημα (παράγωγος σύνθετης συνάρτησης)

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο u = f(x), τότε η συνάρτηση gof είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει ότι: $[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$.

- Αν $u = f(x)$ και $y = g(u)$, ισχύει ο παρακάτω κανόνας που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Πίνακας παράγωγων βασικών συναρτήσεων

$(c)' = 0$	$(x)' = 1$
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$(e^x)' = e^x$
$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$, $\alpha > 0$	$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$

Πίνακας παράγωγων σύνθετων συναρτήσεων

$[(f(x))^{\alpha}]' = \alpha(f(x))^{\alpha-1}f'(x)$	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x),\ f(x) > 0$
$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{[f(x)]^2}f'(x)$	$[\eta\mu f(x)]' = \sigma\upsilon\nu(f(x))f'(x)$
$[\sigma\upsilon\nu(f(x)]' = -\eta\mu(f(x))f'(x)$	$[\varepsilon\varphi f(x)]' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(f(x))}f'(x)$
$[\sigma\varphi(f(x))]' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2(f(x))}f'(x)$	$(e^{f(x)})' = e^{f(x)}f'(x)$
$(\alpha^{f(x)})' = \alpha^{f(x)}\ln\alpha\, f'(x),\ \alpha > 0$	$(\ln\lvert f(x)\rvert)' = \dfrac{1}{f(x)}f'(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, ενώ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $(0, +\infty)$. Στο σημείο $x_o = 0$ αποδεικνύεται με τον ορισμό ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

2. Για την εύρεση της παραγώγου συνάρτησης της μορφής $f(x) = \sqrt[\nu]{g(x)}$ εργαζόμαστε ως εξής: για κάθε x με $g(x) > 0$ η f γράφεται $f(x) = [g(x)]^{\frac{1}{\nu}}$ και βρίσκουμε την παράγωγό της με τους κανόνες παραγώγισης. Για κάθε x με $g(x) = 0$ βρίσκουμε την παράγωγο (αν αυτή υπάρχει) με τον ορισμό.
Δηλαδή, μία ρίζα είναι πιθανό να μην είναι παραγωγίσιμη στα σημεία που το υπόρριζο μηδενίζεται.

3. Το θεώρημα παραγώγου γινομένου επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.
Έτσι έχουμε: $[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$.

4. Για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \log_a x$, μετατρέπουμε πρώτα το λογάριθμο σε φυσικό λογάριθμο. Δηλαδή: $f'(x) = (\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Χρειάζεται προσοχή στον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = x^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου μ άρτιος ακέραιος.

Για παράδειγμα, είναι λάθος να γράψουμε: $\left(\sqrt[5]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{5}}\right)' = \dfrac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$, $x \neq 0$, γιατί η συνάρτηση $\sqrt[5]{x^4}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ (αποδεικνύεται με τον ορισμό ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0), ενώ η συνάρτηση $x^{\frac{4}{5}}$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Το σωστό είναι: $f'(x) = \left(\sqrt[5]{x^4}\right)' = \left[\left(x^4\right)^{\frac{1}{5}}\right]' = \dfrac{1}{5}\left(x^4\right)^{\frac{1}{5}-1}\cdot\left(x^4\right)' = \dfrac{1}{5}\left(x^4\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot 4x^3 = \dfrac{4x^3}{5\sqrt[5]{x^{16}}}$, $x \neq 0$.

Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε το πεδίο ορισμού συνάρτησης της μορφής $f(x) = x^a$:

- Αν α θετικός ακέραιος, τότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \Re$.
- Αν α αρνητικός ακέραιος, τότε $A = \Re^*$.
- Αν α δεν είναι ακέραιος με $a > 0$, τότε $A = [0, +\infty)$.
- Αν α δεν είναι ακέραιος με $a < 0$, τότε $A = (0, +\infty)$.

Σημείωση: Η συνάρτηση $f(x) = x^a$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ όταν $0 < a < 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρεθεί όπου ορίζεται η παράγωγος των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$

β) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \Re$.

Για κάθε $x \in \Re^*$ έχουμε: $f'(x) = (\sqrt[5]{x^6})' = \left[\left(x^6\right)^{\frac{1}{5}}\right]' = \frac{1}{5}\left(x^6\right)^{\frac{1}{5}-1}\left(x^6\right)' =$

$\frac{1}{5}\left(x^6\right)^{-\frac{4}{5}} 6x^5 = \frac{6x^5}{5\left(x^6\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{6x^5}{5\sqrt[5]{x^{24}}}$.

Θα βρούμε τώρα, αν ορίζεται, την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 = 0$.

Για $x < 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[5]{x^6}}{x} = \frac{\sqrt[5]{(-x)^6}}{x} = \frac{\sqrt[5]{(-x)^5}\cdot\sqrt[5]{-x}}{x} = \frac{-x\cdot\sqrt[5]{-x}}{x} = -\sqrt[5]{-x}$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}(-\sqrt[5]{-x}) = 0$.

Για $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[5]{x^6}}{x} = \frac{\sqrt[5]{x^5}\cdot\sqrt[5]{x}}{x} = \frac{x\cdot\sqrt[5]{x}}{x} = \sqrt[5]{x}$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt[5]{x}) = 0$.

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, είναι και $f'(0) = 0$.

Άρα, $f'(x) = \begin{cases} \frac{6x^5}{5\sqrt[5]{x^{24}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε: $f'(x) = (\sqrt[5]{x^3})' = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.

Θα βρούμε τώρα, αν ορίζεται, την παράγωγο της f στο σημείο $x_0=0$.

Για $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} = \frac{\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^2}}{x\cdot\sqrt[5]{x^2}} = \frac{x}{x\cdot\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$. Δηλαδή, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας δίκλαδης συνάρτησης, εργαζόμαστε ως εξής:
Στα ανοιχτά διαστήματα στα οποία χωρίζεται το πεδίο ορισμού της συνάρτησης απ' τα σημεία αλλαγής, εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγώγισης. Στα σημεία αλλαγής του τύπου εφαρμόζουμε τον ορισμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να υπολογιστεί όπου ορίζεται η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2ημx + x, & x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = (x^2ημx+x)' =$ $2xημx + x^2συνx + 1$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' =$

$$\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Στο $x_o = 0$ εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη με τον ορισμό:

Για $x < 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2ημx+x-0}{x-0} = xημx + 1$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}(xημx + 1) = 1$.

Για $x > 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\dfrac{x}{x^2+1}-0}{x} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2+1} = 1$.

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$, είναι και $f'(0) = 1$.

Άρα, $f'(x) = \begin{cases} 2xημx + x^2συνx + 1, & x \leq 0 \\ \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, & x > 0 \end{cases}.$

Σημείωση: Το x = 0 μπορεί να γραφτεί σε οποιονδήποτε από τους δύο κλάδους της f αφού: $2\cdot 0\cdot ημ0 + 0^2\cdot συν0 + 1 = 1$, $\frac{1-0^2}{(1+0^2)^2}$ = 1.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3η

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης με τύπο $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ (υπάρχει μεταβλητή στη βάση και στον εκθέτη), εργαζόμαστε με τον παρακάτω τρόπο:

Είναι $f(x) = [g(x)]^{h(x)} = e^{\ln[g(x)]^{h(x)}} = e^{h(x)\cdot\ln[g(x)]}$.

Άρα: $f'(x) = [\, e^{h(x)\cdot\ln[g(x)]}\,]' = e^{h(x)\cdot\ln[g(x)]}\cdot[h(x)\cdot\ln(g(x))]' =$

$[g(x)]^{h(x)}\cdot\left[h'(x)\cdot\ln(g(x)) + h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν $f(x) = (\ln x)^{συνx}$, να βρεθεί αν ορίζεται η $f'(e)$.

Λύση

Για να ορίζεται η f θα πρέπει να ισχύουν: $\begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases}$ ή x>1.

Δηλαδή, το πεδίο ορισμού της f είναι το A = (1, +∞).

Για κάθε x > 1 η f γράφεται: $f(x) = e^{\ln(\ln x)^{συνx}} = e^{συνx\cdot\ln(\ln x)}$.

Άρα για x > 1: $f'(x) = [\, e^{συνx\cdot\ln(\ln x)}\,]' = e^{συνx\cdot\ln(\ln x)}[συνx\,\ln(\ln x)]' =$

$(\ln x)^{συνx}[-ημx\,\ln(\ln x) + συνx\frac{1}{\ln x}(\ln x)'\,] = (\ln x)^{συνx}[-ημx\,\ln(\ln x) + \frac{συνx}{x\ln x}]$.

Επομένως, $f'(e) = (\ln e)^{συνe}[-ημe\,\ln(\ln e) + \frac{συνe}{e\ln e}] =$

$1^{συνe}[-ημe\,\ln 1 + \frac{συνe}{e}] = \frac{συνe}{e}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4η
Όταν ζητάμε την παράγωγο της συνάρτησης f και αυτή βρίσκεται σε κάποια περίπλοκη ισότητα απ' την οποία είναι δύσκολο να βρούμε τον τύπο της f, παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας, εφόσον αυτή αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και για κάθε $x \in \Re$ ισχύει $f(3x + 2) = ημπx$. Να βρείτε τον αριθμό $f'(5)$.

Λύση

$f(3x + 2) = ημ(πx)$ ή $[f(3x + 2)]' = [ημ(πx)]'$ ή $f'(3x + 2)(3x + 2)' =$ $σνν(πx)(πx)'$ ή $3f'(3x + 2) = πσνν(πx)$ ή $f'(3x + 2) = \dfrac{πσυν(πx)}{3}$.

Για $x = 1$ είναι $f'(5) = \dfrac{π \cdot συνπ}{3} = -\dfrac{π}{3}$.

Άλλα παραδείγματα Β΄ ομάδας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\Re$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι περιττή.

Λύση

Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Re$. Τότε, $f(-x) = f(x)$ ή $[f(-x)]' = f'(x)$ ή $f'(-x)(-x)' = f'(x)$ ή $-f'(-x) = f'(x)$ ή $f'(-x) = -f'(x)$. Άρα, η συνάρτηση f' είναι περιττή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x) με πραγματικούς συντελεστές για τα οποία είναι $[P'(x)]^2 = P(x)$ για κάθε $x \in \Re$.

Λύση

Αρχικά, βρίσκουμε το βαθμό του πολυωνύμου P(x) (αν ορίζεται).
Αν ν είναι ο βαθμός του, τότε το P΄(x) έχει βαθμό ν - 1 και το $[P'(x)]^2$ έχει βαθμό 2(ν - 1).
Έτσι λοιπόν θα έχουμε: 2(ν - 1) = ν ή 2ν - 2 = ν ή ν = 2.
Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και έχουμε:
$[P'(x)]^2 = P(x)$ ή $(2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ή $4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ή

$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha \\ 4\alpha\beta = \beta \\ \beta^2 = \gamma \end{cases}$ ή $\begin{cases} 4\alpha = 1 \\ \beta = \beta \\ \gamma = \beta^2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{4} \\ \beta \in \Re \\ \gamma = \beta^2 \end{cases}$. Άρα $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \beta x + \beta^2$ με $\beta \in \Re$.

Άλλη μια λύση του προβλήματος είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

α) Αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου P(x) και της παραγώγου του P΄(x), να δείξετε ότι ο ρ είναι διπλή ρίζα του P(x) και αντιστρόφως.
β) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \Re$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + (3\alpha - \beta)x - 2$ να διαιρείται με το $(x - 1)^2$.

Λύση

α) Αν ο ρ είναι μία ρίζα του P(x) και του P΄(x), υπάρχουν πολυώνυμα f(x) και g(x) τέτοια ώστε να είναι:
$P(x) = (x - \rho)f(x)$ (1) και $P'(x) = (x - \rho)g(x)$ (2)
Από την (1) έχουμε $P'(x) = (x - \rho)'f(x) + (x - \rho)f'(x) = f(x) + (x - \rho)f'(x)$ και λόγω της (2) προκύπτει ότι:
$(x - \rho)g(x) = f(x) + (x - \rho)f'(x)$ ή $f(x) = (x - \rho)[g(x) - f'(x)]$.
Έτσι, η (1) γράφεται $P(x) = (x - \rho)^2[g(x) - f'(x)]$ και επομένως ο ρ είναι διπλή ρίζα του P(x).
Αντιστρόφως, αν ο ρ είναι διπλή ρίζα του P(x), τότε υπάρχει πολυώνυμο φ(x) με $P(x) = (x - \rho)^2\varphi(x)$.
Είναι $P'(x) = 2(x - \rho)\varphi(x) + (x - \rho)^2\varphi'(x) = (x - \rho)[2\varphi(x) + (x - \rho)\varphi'(x)]$ και επομένως ο ρ είναι ρίζα του P΄(x).

β) Το $P(x)$ διαιρείται με το $(x - 1)^2$ όταν έχει διπλή ρίζα τον $\rho = 1$. Αυτό συμβαίνει όταν ο $\rho = 1$ είναι ρίζα και του $P'(x) = 6x^2 + 2\alpha x + 3\alpha - \beta$.
Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2 + \alpha + 3\alpha - \beta - 2 = 0 \\ 6 + 2\alpha + 3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \beta = 4\alpha \\ 5\alpha - \beta = -6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = -24 \end{cases}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδα

1. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$

β) $f(x) = 4x^4 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - \ln 2,\ x > 0$

γ) $f(x) = 5\ln x + \sqrt{2}\,\eta\mu x - \ln 2 \cdot e^x$

δ) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^{\frac{3}{4}},\ x > 0$

ε) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 3\sqrt[4]{x},\ x > 0$

στ) $f(x) = 2\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu x - \ln x + 8e^x$

ζ) $f(x) = \sqrt{x} - 3\ln x + \log x - 3e^x$

2. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3\sigma\upsilon\nu x$

β) $f(x) = \sqrt{x}\,\eta\mu x$

γ) $f(x) = x^4\ln x$

δ) $f(x) = x^2\cdot\eta\mu x\cdot e^x$

ε) $f(x) = x^3\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x$

στ) $f(x) = \ln x - \sqrt{x}\,e^x$

ζ) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2e^x\ln x$

η) $f(x) = 5xe^x\eta\mu x - x^2\sigma\upsilon\nu x$

θ) $f(x) = (x^2 - x)\cdot\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

ι) $f(x) = 4x^3\cdot\sqrt{x}\cdot(e^x + \ln x)$

ια) $f(x) = 3^x\cdot\ln x$

3. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$

β) $f(x) = \varepsilon\varphi x + \dfrac{x}{x^2+1}$

γ) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

δ) $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}$

ε) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{\ln x}$

στ) $f(x) = \dfrac{x^2\ln x}{e^x}$

ζ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

η) $f(x) = \dfrac{xe^x}{\sqrt{x}}$

θ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+x+3}{\ln x - 1}$

ι) $f(x) = \dfrac{x\cdot\eta\mu x\cdot\ln x}{e^x - 1}$

4. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x^3 + 1)^3$

β) $f(x) = συν^2x$

γ) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

δ) $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x} - \sqrt[3]{x^4}$

ε) $f(x) = e^{x^2} - x\ln(x - 2)$

στ) $f(x) = x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

ζ) $f(x) = x\ln\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}$

η) $f(x) = 2^x \cdot \ln(x^2 + 1)$

θ) $f(x) = ημ3x + εφ4x$

ι) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$

ια) $f(x) = συν(ημx + x^2)$.

5. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

β) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

γ) $f(x) = 1 + (x + 1)^{\frac{4}{5}}$

δ) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

ε) $f(x) = \sqrt[5]{x^8}$

στ) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

6. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (\ln x)^{ημx}$

β) $f(x) = (ημx)^x$

γ) $f(x) = (x^2 + 1)^{\ln x}$

δ) $f(x) = x^{x^x}$

ε) $f(x) = (ημx)^{e^x}$

στ) $f(x) = 2^{2^x}$

ζ) $f(x) = (συνx)^{x^2}$

η) $f(x) = συνx^x$

θ) $f(x) = (2^x)^x$

ι) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^x$

7. Να βρεθεί (όπου ορίζεται) η 1η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \le 1 \\ x^3 - x^2 & x > 1 \end{cases}$

β) $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ x^2, & x \le 0 \end{cases}$

γ) $f(x) = \begin{cases} xe^x + 1, & x \ge 0 \\ x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$

δ) $f(x) = \begin{cases} x - 2\sqrt{x}, & x \ge 1 \\ x^3 - 3x + 1, & x < 1 \end{cases}$

ε) $f(x) = |x^2 - 4|$

στ) $f(x) = x|x^2 - x|$.

8. Να βρεθεί (όπου ορίζεται) η 2η παράγωγος των συναρτήσεων της άσκησης 7.

9. Αν $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2 - 3x + 2}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$, να βρεθούν οι συναρτήσεις f', g'. Ισχύει ότι $f' = g'$;

10. α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και για κάθε $x \in \Re$ ισχύει $f(x) > 0$, να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $g(x) = [f(x)]^x$, $x \in \Re$.
β) Αν $\alpha > 0$, να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $h(x) = \alpha^{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \Re$.

11. Έστω $f(x) = 3e^{-x} + e^{-2x}$. Να αποδειχθεί ότι $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Re$.

12. Αν $f(x) = 2e^x + 3e^{-x} + 4ημx + 5συνx$, να αποδειχθεί ότι $f^{(4)}(x) = f(x)$.

13. Αν $f(x) = ημ(2x + κ)$, να αποδειχθεί ότι $f''(x) + 4f(x) = 0$.

<u>Β΄ ομάδα</u>

1. Αν $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^3$, να αποδειχθεί ότι
$(x^2 - 1)f''(x) + xf'(x) - 9f(x) = 0$.

2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Re$. Αν η f είναι περιττή, να αποδειχθεί ότι η f΄ είναι άρτια.

3. Έστω μια άρτια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Re$.
Αν $g(x) = (3x^2 - συνx)f(x) + \sqrt{x^2 + 1} + 2004x$, να αποδειχθεί ότι $g'(0) = 2004$.

4. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$, για την οποία ισχύει
$f(e^x + x) = ημ(πσυνx + x)$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδειχθεί ότι $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση g ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $g(-2) = 250$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 4(x - 1)^2 g(2x - 4)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και να βρεθεί η $f''(1)$.

6. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$, για την οποία ισχύουν $f(3) = 4$ και $f'(3) = -3$.
α) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3f(x) - 12}{x^2 - 9}$.
β) Αν $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3f'(x) + 9}{2x - 6} = 15$, να αποδειχθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

7. Έστω μια συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με f(5) = 0, για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 2001 + f^3(x)$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $f''(5) = 0$

β) $f^{(3)}(5) = 0$

γ) $f^{(4)}(5) = 6 \cdot 2001^3$

δ) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f(x)}{x-5} = 2001$.

8. Να βρεθεί πολυώνυμο f δευτέρου βαθμού για το οποίο ισχύουν: f(1) = -1, $f'(2) = 7$, $f''(2004) = 6$.

9. Να βρεθεί πολυώνυμο f τρίτου βαθμού για το οποίο ισχύουν: f(1) = 2, $f'(1) = 3$, $f''(2) = 12$, $f^{(3)}(5) = 6$.

10. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} x^3 ημ\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ **β)** $f(x) = \begin{cases} x^2 συν\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

11. Αν F(x) = f(x).g(x) και $f'(x).g'(x) = α$, όπου α σταθερός αριθμός, να αποδείξετε ότι $\dfrac{F^{(3)}(x)}{F(x)} = \dfrac{f^{(3)}(x)}{f(x)} + \dfrac{g^{(3)}(x)}{g(x)}$, όπου $F(x), f(x), g(x) \neq 0$.

12. Δίνεται η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύουν: g(x) > 0 για κάθε $x \in \Re$ και g(0) = 2001. Έστω μια άλλη συνάρτηση $f(x) = α[1 + g(x)]^x$, $α \in \Re$. Αν $f'(0) = \ln 2002$, να υπολογιστεί το α.

13. Έστω f μια πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού με ρίζες $ρ_1, ρ_2, ρ_3$ διαφορετικές ανά δύο. Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{ρ_1}{f'(ρ_1)} + \dfrac{ρ_2}{f'(ρ_2)} + \dfrac{ρ_3}{f'(ρ_3)} = 0$.

14. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + νx^{ν-1}$

β) $S_2 = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \ldots + νe^{νx}$.

15. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{ν-1} + x^{ν-2} + \ldots + x + 1 - \dfrac{x^ν}{x-1}$.

16. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = (x - x_o) \cdot g(x)$, να δειχθεί ότι: $f'(x_o) = 0 \Leftrightarrow g(x_o) = 0$.

17. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \cdot g(x) = x$, να αποδειχθεί ότι οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα.