ΚΑΝΟΝΕΣ DE L'HOSPITAL

Θεώρημα 1 (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (άπειρο ή πραγματικός αριθμός) τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα 2 (μορφή $\frac{\infty}{\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (άπειρο ή πραγματικός αριθμός) τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Παρατηρήσεις

α) Το δεύτερο θεώρημα ισχύει και για τα όρια της μορφής $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ και $\frac{-\infty}{-\infty}$.

β) Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια.

στ) Αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, δε σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Σ' αυτή την περίπτωση απλά το όριο δεν υπολογίζεται με κανόνα De L'Hospital.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η (Μορφή $\frac{0}{0}$)

Για τον υπολογισμό ορίων της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, χρησιμοποιούμε το 1ο Θεώρημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ είναι το $A = \mathbb{R}^*$.

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-e^{\frac{1}{x}}) = 1 - e^0 = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα De L' Hospital είναι:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right) = -e^0 = -1.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η (Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$)

Για τον υπολογισμό ορίων της μορφής $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \pm\infty$, χρησιμοποιούμε το 2ο Θεώρημα.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{\ln(x-\pi)}{\sigma\varphi x}$.

<u>Λύση</u>

Έστω $f(x) = \frac{\ln(x-\pi)}{\sigma\varphi x}$.

Πρέπει $\begin{cases} x - \pi > 0 \\ x \neq \kappa\pi \\ x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \left\{x > \pi \,/\, x \neq \kappa\pi \text{ και } x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to \pi^+} \ln(x-\pi) \overset{u=x-\pi}{=} \lim\limits_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to \pi^+} \sigma\varphi x = +\infty$ σύμφωνα με το Θεώρημα De L' Hospital είναι:

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{\ln(x-\pi)}{\sigma\varphi x} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{[\ln(x-\pi)]'}{(\sigma\varphi x)'} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\frac{1}{x-\pi}}{-\frac{1}{\eta\mu^2 x}} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\eta\mu^2 x}{\pi - x}.$$

Αφού $\lim\limits_{x \to \pi^+} \eta\mu^2 x = 0$, $\lim\limits_{x \to \pi^+} (\pi - x) = 0$, εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα De L' Hospital κι έχουμε ότι: $\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{\eta\mu^2 x}{\pi - x} = \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{(\eta\mu^2 x)'}{(\pi - x)'} = \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{-1} = -2 \lim\limits_{x \to \pi^+} (\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) =$ $-2\eta\mu\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\pi = 2 \cdot 0 \cdot (-1) = 0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ $3^{η}$ (Μορφή $0\cdot\infty$)

Για τον υπολογισμό ορίων της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ όπου $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$, εργαζόμαστε ως εξής:

Γράφουμε το γινόμενο $f(x)\cdot g(x)$ σαν πηλίκο: $\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ (μορφή $\dfrac{0}{0}$) ή $\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ (μορφή $\dfrac{\infty}{\infty}$) και στη συνέχεια εφαρμόζουμε κανόνα De L' Hospital.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot σφx)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x\cdot σφx$ είναι το $A = \mathbb{R}-\{κπ\}, κ\in\mathbb{Z}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} σφx = +\infty$ κι επομένως το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ είναι της μορφής $0\cdot\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot σφx) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{\dfrac{1}{σφx}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{εφx}\right) \overset{\left(μορφη\,\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x)'}{(εφx)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\dfrac{1}{συν^2x}} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} συν^2x = συν^2 0 = 1$.

☞ **ΜΕΘΟΔΟΣ $4^{η}$ (Μορφή $\infty-\infty$)**

Για τον υπολογισμό ορίων της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$, όπου

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$, εργαζόμαστε ως εξής:

- μετατρέπουμε τη διαφορά $f(x) - g(x)$ σε $f(x)\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$ ή $g(x)\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right]$

  και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κανόνα De L'Hospital για το όριο

  $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ ή το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ή

- μετατρέπουμε τη διαφορά $f(x) - g(x)$ σε $\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$ και

  στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κανόνα De L'Hospital.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sigma\varphi x+\ln x)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sigma\varphi x+\ln x$ είναι το $A = \{x>0 \,/\, x\neq \kappa\pi\}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\varphi x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ είναι της μορφής $\infty-\infty$.

Για $x\in A$, με $x\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$ είναι: $f(x) = \sigma\varphi x+\ln x = \sigma\varphi x\left(1+\dfrac{\ln x}{\sigma\varphi x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sigma\varphi x} \overset{\left(\mu o\rho\varphi\eta\ \frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\sigma\varphi x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x} = +\infty.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{\ln x}{\sigma\varphi x}\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sigma\varphi x\left(1+\dfrac{\ln x}{\sigma\varphi x}\right)\right] = +\infty$, αφού και $\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\varphi x=+\infty$.

☞ **ΜΕΘΟΔΟΣ 5η (Μορφή 0^0, 1^∞, ∞^0)**

Για τον υπολογισμό ορίων της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)^{g(x)}]$, όπου

α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ ή

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ ή

γ) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

μετατρέπουμε τη συνάρτηση $f(x)^{g(x)}$ σε $e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln[f(x)]}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln[f(x)]}$ σύμφωνα με τη 3η μέθοδο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^x$ είναι το $A = (0, +\infty)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ είναι της μορφής 0^0.

Είναι $f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$.

Το $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$ είναι της μορφής $0\cdot(-\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{(\text{μορφη } \frac{-\infty}{+\infty})}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)} = e^0 = 1.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f(x) = $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}$ είναι το $A = \left\{x>0 \,/\, x\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\varepsilon\varphi x = 0$, το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ είναι της μορφής $(+\infty)^0$.

Είναι f(x) = $e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}} = e^{\varepsilon\varphi x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-\varepsilon\varphi x\ln x}$.

Το $\lim\limits_{x\to 0^+}$ [-εφx·lnx] είναι της μορφής $0\cdot\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}$ [-εφx·lnx] = $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{-\sigma\varphi x} \overset{(\mu o\rho\varphi\eta\ \frac{-\infty}{-\infty})}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{(-\sigma\varphi x)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\eta\mu^2 x}{x} = -\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x$ = -1·0 = 0.

Σημείωση: Τα θεωρήματα De L' Hospital μπορούμε να τα εφαρμόσουμε διαδοχικά δύο ή και παραπάνω φορές, όπως στο παρακάτω παράδειγμα, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^{-\varepsilon\varphi x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-\varepsilon\varphi x\ln x)} = e^0 = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f(x) = $\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$ είναι το $A = \mathbb{R}-\{\kappa\pi\}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ είναι της μορφής $\infty-\infty$.

Έτσι έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\eta\mu^2 x}\right) \overset{(\mu o\rho\varphi\eta\ \frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2-\eta\mu^2 x)'}{(x^2\eta\mu^2 x)'} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{2x\eta\mu^2 x+2x^2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\eta\mu 2x}{2x\eta\mu^2 x+x^2\eta\mu 2x}\overset{(\mu o\rho\varphi\eta\ \frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\eta\mu 2x)'}{(2x\eta\mu^2 x+x^2\eta\mu 2x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\sigma\upsilon\nu 2x}{2\eta\mu^2 x+4x\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu 2x+2x^2\sigma\upsilon\nu 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\sigma\upsilon\nu 2x}{2\eta\mu^2 x+4x\eta\mu 2x+2x^2\sigma\upsilon\nu 2x}$$

$$\overset{(\mu o\rho\varphi\eta\ \frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(2-2\sigma\upsilon\nu 2x)'}{(2\eta\mu^2 x+4x\eta\mu 2x+2x^2\sigma\upsilon\nu 2x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\eta\mu 2x}{4\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+4\eta\mu 2x+8x\sigma\upsilon\nu 2x+4x\sigma\upsilon\nu 2x-4x^2\eta\mu 2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\eta\mu 2x}{6\eta\mu 2x+12x\sigma\upsilon\nu 2x-4x^2\eta\mu 2x}\overset{(\mu o\rho\varphi\eta\ \frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(4\eta\mu 2x)'}{(6\eta\mu 2x+12x\sigma\upsilon\nu 2x-4x^2\eta\mu 2x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8\sigma\upsilon\nu 2x}{12\sigma\upsilon\nu 2x+12\sigma\upsilon\nu 2x-24x\eta\mu 2x-8x\eta\mu 2x-8x^2\sigma\upsilon\nu 2x}=$$

$$\frac{8\cdot 1}{12\cdot 1+12\cdot 1-0-0-0}=\frac{1}{3}.$$

Άλλες ασκήσεις Β΄ ομάδας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να βρεθεί σχέση μεταξύ των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2\ln x+\alpha, & x>0\\ \beta\ , & x=0\end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

Λύση

Για να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x + \alpha) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}+\alpha\right)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} = +\infty$, σύμφωνα με το Θεώρημα De L' Hospital είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-2}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} + a\right) = 0 + a = a$.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, δηλαδή $a = \beta$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\ln x + a - \beta}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$, σύμφωνα με το Θεώρημα De L' Hospital είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Είναι $f'(0) = 0$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a = \beta$.
Επομένως πρέπει $a = \beta$ για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Αν για την f ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf^{(3)}(x)}{f''(x)} = 1$,

τότε να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$.

Λύση

Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ είναι της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}[xf'(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα De L' Hospital είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[xf'(x)]'}{[f(x)]'} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x)}$.

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x) + xf''(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x)} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[f'(x) + xf''(x)]'}{[f'(x)]'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x) + f''(x) + xf^{(3)}(x)}{f''(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2f''(x) + xf^{(3)}(x)}{f''(x)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2 + \frac{xf^{(3)}(x)}{f''(x)}\right] = 2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{xf^{(3)}(x)}{f''(x)} = 2 + 1 = 3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδα

1. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{e^x-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x-1}{e^{\frac{1}{x}}}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^4}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x^2}{x^2}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\ln x}{x-1}$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x-\eta\mu x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x}{x^2}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\ln x-x^2+1}{(x-1)^2}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-x^2-2x-2}{x^3}$

θ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2}{x-\eta\mu x}$ **ι)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x}{2e^x-x^2-2x-2}$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x+x}{e^x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^4}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x^3-1)}{e^x}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\ln x}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-\varepsilon\varphi x}{x^2}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2e^{x^2}-x^2-2}{\sigma\upsilon\nu x-1}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sigma\upsilon\nu x-x}{e^{2x}-\sigma\upsilon\nu 2x-2x}$

θ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x-x\sigma\upsilon\nu x}$ **ι)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-2x^2+x+1}{xe^x}$

4. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν:

α) $f(x)=\dfrac{x^2}{3^x}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

γ) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ **δ)** $f(x) = \frac{ημx}{x}$

ε) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ **στ)** $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

5. Να βρεθούν οι τιμές των α, $β \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} ημx + α, & x \leq 0 \\ x^2 \ln x + βx, & x > 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

6. Να βρεθούν τα α, $β \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} αe^{2x} - 1, & x \leq 0 \\ ημβx + β, & x > 0 \end{cases}$.

7. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{|x-1|}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

8. Να βρεθούν τα α, $β \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} αx^2 + β, & x \leq e \\ (\ln x)^2, & x > e \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

<u>Β΄ ομάδα</u>

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - \ln x)$ **β)** $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} - \frac{1}{ημx})$

γ) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{εφx} - \frac{1}{x})$ **δ)** $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x^2)$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}(x^2 \ln x)$ **β)** $\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}\ln x)$

γ) $\lim_{x\to 0^+}(ημx \cdot \ln x)$ **δ)** $\lim_{x\to 0^+}(εφx \cdot \ln x)$

ε) $\lim_{x\to 0^+}(x \cdot σφx)$ **στ)** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)εφx\right]$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}(ημx)^x$ **β)** $\lim_{x\to 0^+}(ημx)^{ημx}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$

ε) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to0^+}(\sigma\varphi x)^x$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2\ln x - x^2 + x}{x^2-2x+1}, & 0<x\neq1 \\ \alpha \quad , & x=1 \end{cases}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$, να αποδειχθεί ότι είναι και παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

5. Να βρεθούν τα α, $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^{\alpha x}-2e^{\beta x}-\alpha x}{x^2} = 3$.

6. Να βρεθούν τα α, $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^{\alpha x}-2e^{\beta x}+\beta x^2}{x^2} = -6$.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

Αν ισχύουν: $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 4$, να αποδειχθεί ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και να βρεθεί η $g'(0)$. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $x_o = 0$;

8. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν $f'(0) = 0$, να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(-x^2)}{x^4}$.

9. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\Delta = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο Δ με $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ και $f^{(3)}(0) = 3$. Να βρεθεί όπου ορίζεται η παράγωγος της συνάρτησης $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

10. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x\neq0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και η εφαπτομένη της C_f στο A(0, 1) είναι κάθετη στην ευθεία ε: x + y + 3 = 0.

11. Να βρεθούν τα α, β$\in(0,+\infty)$, ώστε η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} \alpha^x+\beta^x, & x\le 0 \\ e^{\alpha x}+x+\alpha, & x>0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο x_o = 0.

12. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι 4 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f(0) = f΄(0) = f΄΄(0) = 0 και $f^{(3)}(0)$ = 3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x^3}{x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f: [-1, 1]$\to\mathbb{R}$ με f(x) = $\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x}, & \alpha\nu\ x\in[-1,0) \\ x^3+\alpha x+\beta, & \alpha\nu\ x\in[0,1] \end{cases}$.

α) Να βρεθούν τα α, β$\in\mathbb{R}$ ώστε η f να παραγωγίζεται στο (-1, 1).
β) Να δειχθεί ότι |f(x)| $\le$ 1, για κάθε x$\in$[-1, 1].

14. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ = f΄΄(x).

15. Αν η συνάρτηση f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση $f^5(x)$ + $f^3(x)$ + f(x) = x - ημx για κάθε x$\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$ = $\dfrac{1}{6}$.

16. Αν η συνάρτηση f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-4f(x-2h)+3f(x-3h)}{h^2}$ = 6f΄΄(x).