ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός

Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχή σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
α) Θα λέμε ότι η f είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
β) Θα λέμε ότι η f είναι κοίλη ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα Δ.
α) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ.
β) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ.

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) αλλά όχι απαραίτητα στο σημείο $x_o \in (\alpha, \beta)$.
α) Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_o) και κοίλη στο (x_o, β) ή αντιστρόφως και
β) Αν ορίζεται εφαπτομένη της C_f, στο $A(x_o, f(x_o))$,
τότε το $A(x_o, f(x_o))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.
Όταν το $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_o και το x_o θα το λέμε θέση σημείου καμπής.

Θεώρημα

Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_o και το $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε $f''(x_o)=0$.

Παρατηρήσεις

α) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω απ' τη C_f.

β) Αν μια συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω απ' τη C_f.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στα σημεία καμπής διαπερνά τη C_f.

δ) Είναι δυνατόν να έχουμε $f''(x_o) = 0$ χωρίς να παρουσιάζει η f καμπή στο x_o. Πράγματι για την $f(x) = x^4$ είναι $f'(x) = 4x^3$ και $f''(x) = 12x^2$ και παρατηρούμε ότι $f''(0) = 0$, αλλά και $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ και στο $x_o = 0$ δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

☞ **ΜΕΘΟΔΟΣ 1η**

Για να βρούμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της C_f εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.
2. Υπολογίζουμε την παράγωγο f΄ και τη δεύτερη παράγωγο f΄΄.
3. Λύνουμε την εξίσωση $f''(x) = 0$.
4. Λύνουμε την ανίσωση $f''(x) > 0$ (Με τη βοήθειά της βρίσκουμε το πρόσημο της f΄΄).
5. Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμου της f΄΄ και απ' αυτόν βρίσκουμε την κυρτότητα της C_f.

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ είναι:

- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η δεύτερη παράγωγος της f είναι μηδέν.

Αν x_o είναι μια πιθανή θέση σημείου καμπής, τότε το $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής, όταν η f΄΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_o, και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_o, f(x_o))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρεθούν σημεία καμπής και να μελετηθούν ως προς την κυρτότητα οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x^2 + 4}$

β) $f(x) = x^2 + 8\ln x$

γ) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{2x^2+x+8}{x^2+4}\right)' =$

$$\frac{(4x+1)(x^2+4)-(2x^2+x+8)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}.$$

Επίσης $f''(x) = \left[\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}\right]' = \dfrac{-2x\cdot(x^2+4)^2-(4-x^2)\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} =$

$$\frac{-2x\cdot(x^2+4)-(4-x^2)\cdot 4x}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3} = \frac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} = \frac{2x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2+4)^3}.$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2+4)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2\sqrt{3}$ ή $x = -2\sqrt{3}$.

Το πρόσημο της f'', η κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$		0		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
x	-		-	0	+		+	
$x+2\sqrt{3}$	-	0	+		+		+	
$x-2\sqrt{3}$	-		-		-	0	+	
f''	-	0	+	0	-	0	+	
f	∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩	Σ.Κ.	∪	

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -2\sqrt{3}]$, $[0, 2\sqrt{3}]$ και κυρτή στα διαστήματα $[-2\sqrt{3}, 0]$, $[2\sqrt{3}, +\infty)$.

Η f έχει τρία σημεία καμπής, τα $A(-2\sqrt{3}, f(-2\sqrt{3}))$, $B(0, f(0))$, $\Gamma(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3}))$.

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $f'(x) = (x^2 + 8\ln x)' = 2x + \dfrac{8}{x}$.

Επίσης $f''(x) = \left(2x + \dfrac{8}{x}\right)' = 2 - \dfrac{8}{x^2}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{8}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2$.

x	0		2		+∞
f΄΄		-	0	+	
f		∩	Σ.Κ.	∪	

Η f είναι κοίλη στο διάστημα (0, 2] και κυρτή στο διάστημα [2, +∞).
Το A(2, 4 + 8ln2) είναι σημείο καμπής της C_f.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε $f'(x) = (e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

$$f''(x) = (-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})' = (-\frac{1}{x^2})'e^{\frac{1}{x}} + (-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})' = \frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = \frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

x	−∞		$-\frac{1}{2}$		0		+∞
f΄΄		-	0	+	‖	+	
f		∩	Σ.Κ.	∪	‖	∪	

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ και κυρτή στα διαστήματα $[-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, +\infty)$.

Το $A(-\frac{1}{2}, e^{-2})$ είναι σημείο καμπής της C_f.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x^3 - 15x^2 + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιοριστούν τα σημεία καμπής της C_f.

Λύση

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική σε καθένα από αυτά.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^3 + 6x^2 + 2) = 2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^3 - 15x^2 + 2) = 2$ και $f(0) = 2$.

Επειδή $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και σ' όλο το $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = 3x^2 + 12x$ και στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 3x^2 - 30x$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+6x^2+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x^2+6x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-15x^2+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x^2-15x) = 0.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Άρα $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 12x, & \text{αν } x < 0 \\ 3x^2 - 30x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f''(x) = 6x + 12$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = 6x - 30$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2+12x-0}{x} = \lim_{x\to 0^-}(3x+12) = 12$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2-30x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(3x-30) = -30.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$, η f δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άρα $f''(x) = \begin{cases} 6x + 12, & \text{αν } x < 0 \\ 6x - 30, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

Το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου, τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		0		5		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\frown$	18	$\smile$	2	$\frown$	-248	$\smile$	
			Σ. Κ.		Σ. Κ.		Σ. Κ.		

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[0, 5]$ και κυρτή στα διαστήματα $[-2, 0]$, $[5, +\infty)$.
Τα σημεία Α(-2, 18), Β(0, 2), Γ(5, -248) είναι σημεία καμπής της C_f.
Ειδικά το Β(0, 2) είναι σημείο καμπής αφού εκατέρωθεν του 0 η f'' αλλάζει πρόσημο και ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο Β αφού $f'(0) = 0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

- Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω απ' τη C_f.
- Αν μια συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω απ' τη C_f.

Εκμεταλλευόμενοι τις δύο παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να αποδείξουμε ανισώσεις όπως είναι η ανίσωση του παρακάτω παραδείγματος.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(1, f(1)).
γ) Να αποδειχθεί ότι $e^{x^2-1} - 2x + 1 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$ και

$f''(x) = (2xe^{x^2})' = 2e^{x^2} + 2x \cdot 2xe^{x^2} = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0$.
Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
β) Είναι $f(1) = e$ και $f'(1) = 2e$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της Α(1, f(1)) είναι:

ε: $y - f(1)= f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - e = 2e(x - 1) \Leftrightarrow y = 2ex - e$.

γ) Αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(x) \geq 2ex - e \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 2ex - e \Leftrightarrow$
$e e^{x^2-1} \geq e(2x - 1) \Leftrightarrow e^{x^2-1} \geq 2x - 1 \Leftrightarrow e^{x^2-1} - 2x + 1 \geq 0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ $3^η$

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη δεν έχει σημεία καμπής, έχουμε τις παρακάτω επιλογές:

- αποδεικνύουμε ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη στο πεδίο ορισμού της.
- υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει καμπή για κάποιο σημείο x_o και καταλήγουμε σε άτοπο.
- αποδεικνύουμε ότι η $f''(x) \neq 0$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $3f^2(x) + xf(x) + 3x^2 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$[3f^2(x) + xf(x) + 3x^2]' = (x)'$
$6f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) + 6x = 1$
$[6f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) + 6x]' = (1)'$
$6f'(x)f'(x) + 6f(x)f''(x) + f'(x) + f'(x) + xf''(x) + 6 = 0$
$f''(x)\,[6f(x) + x] + 6[f'(x)]^2 + 2f'(x) + 6 = 0$ (1).
Έστω ότι η f παρουσιάζει για $x = x_o$ σημείο καμπής. Τότε θα ισχύει ότι $f''(x_o) = 0$.
Η σχέση (1) για $x = x_o$ δίνει: $f''(x_o)\,[6f(x_o)+ x_o] + 6[f'(x_o)]^2 + 2f'(x_o) + 6 = 0 \Leftrightarrow$
$6[f'(x_o)]^2 + 2f'(x_o) + 6 = 0$.
Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη γιατί είναι δευτέρου βαθμού ως προς $f'(x_o)$ και έχει αρνητική διακρίνουσα. Άρα καταλήγουμε σε άτοπο κι επομένως η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4η

Αν μια συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη, παρουσιάζει σημείο καμπής σε εσωτερικό σημείο x_o διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε ισχύει ότι $f''(x_o) = 0$.

Σε ασκήσεις που ζητάμε τις τιμές κάποιων παραμέτρων, ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο x_o, θα πρέπει να γίνεται επαλήθευση, γιατί δε φτάνει η προϋπόθεση $f''(x_o) = 0$. Είναι απαραίτητη και η αλλαγή προσήμου της f'' εκατέρωθεν του x_o.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να βρείτε τις τιμές των α, $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 1$ να έχει σημείο καμπής το Μ(1, 3).

Λύση

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 + 1)' = 3\alpha x^2 + 2\beta x$ και $f''(x) = (3\alpha x^2 + 2\beta x)' = 6\alpha x + 2\beta$.

Για να είναι το Μ(1, 3) σημείο καμπής της C_f θα πρέπει $\begin{cases} f''(1) = 0 \\ f(1) = 3 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 6\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + 1 = 3 \end{cases}$

ή $\alpha = -1$ και $\beta = 3$.

Πράγματι για $\alpha = -1$ και $\beta = 3$ είναι $f''(x) = -6x + 6 = 6(1 - x)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		+	0	-	
f		∪	Σ.Κ.	∩	

Αφού η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1, στο σημείο Μ(1, 3) η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής κι επομένως οι τιμές $\alpha = -1$, $\beta = 3$ είναι δεκτές.

Άλλα παραδείγματα Β΄ ομάδας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να αποδείξετε ότι τα πιθανά σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = x\eta\mu x$ ανήκουν στην καμπύλη $y^2 = \frac{4x^2}{x^2+4}$.

Λύση

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $f'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$ και
$f''(x) = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$.
Τα πιθανά σημεία στα οποία η f παρουσιάζει καμπή είναι ρίζες της f΄΄, δηλαδή ρίζες της εξίσωσης $2\sigma\upsilon\nu x = x\eta\mu x$.
Έστω $M(x_o, f(x_o))$ πιθανό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f, οπότε έχουμε:
$2\ \sigma\upsilon\nu x_o = x_o\eta\mu x_o$ (1).
Αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$f^2(x_o) = \frac{4x_o^2}{x_o^2+4} \Leftrightarrow x_o^2\eta\mu x_o^2 = \frac{4x_o^2}{x_o^2+4} \Leftrightarrow (x_o^2 + 4)x_o^2\eta\mu x_o^2 = 4x_o^2 \Leftrightarrow$
$(x_o^2 + 4)\eta\mu x_o^2 = 4$ (είναι $x_o \neq 0$ λόγω της (1)) $\Leftrightarrow x_o^2\eta\mu x_o^2 + 4\ \eta\mu x_o^2 = 4 \Leftrightarrow$
(λόγω της (1)) $4\sigma\upsilon\nu^2 x_o + 4\ \eta\mu x_o^2 = 4$ που ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να βρεθεί το πλήθος των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{3\alpha}{4}x^4 - 2x^3 + (\alpha - 1)x^2 - x + 1$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{3\alpha}{4}4x^3 - 6x^2 + 2(\alpha - 1)x - 1 = 3\alpha x^3 - 6x^2 + 2(\alpha - 1)x - 1$
και $f''(x) = 9\alpha x^2 - 12x + 2(\alpha - 1)$.
α) Αν $\alpha = 0$, τότε $f''(x) = -12x - 2$.
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$.
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{6}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
f''	+	0	-
f	∪	Σ.Κ.	∩

Άρα η C_f έχει ένα σημείο καμπής, το $A(-\frac{1}{6}, f(-\frac{1}{6}))$.

β) Αν $\alpha \neq 0$, τότε η f'' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9\alpha \cdot 2(\alpha - 1) = 144 - 72\alpha^2 + 72\alpha = 72(-\alpha^2 + \alpha + 2)$.

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 2$, τότε η f'' μηδενίζεται σε δύο σημεία εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο. Σ' αυτήν την περίπτωση η C_f έχει δύο σημεία καμπής.
- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha < -1$ ή $\alpha > 2$, τότε η f'' δε μηδενίζεται κι επομένως η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ ή $\alpha = 2$, τότε η f'' μηδενίζεται σ' ένα σημείο ρ εκατέρωθεν του οποίου διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ κι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8</u>

Αν $f(x) = x + (x + \alpha - 1)e^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η C_f έχει σημείο καμπής για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος αυτών είναι μία καμπύλη η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

<u>Λύση</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 1 + e^x + (x + \alpha - 1)e^x = 1 + (x + \alpha)e^x$ και
$f''(x) = e^x + (x + \alpha)e^x = (x + \alpha + 1)e^x$.
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x + \alpha + 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -\alpha - 1$.
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x + \alpha + 1)e^x > 0 \Leftrightarrow x > -\alpha - 1$.
Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$-\alpha - 1$	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩	Σ.Κ.	∪

Επομένως η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty, -\alpha - 1]$ και προς τα άνω στο διάστημα $[-\alpha - 1, +\infty)$.

Το σημείο Μ $(-\alpha - 1, f(-\alpha - 1))$ είναι προφανώς σημείο καμπής της C_f για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
Το Μ έχει τετμημένη $x = -\alpha - 1$ και τεταγμένη $y = -\alpha - 1 - 2e^{-\alpha-1}$,
οπότε $y = x - 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των σημείων καμπής της C_f είναι η καμπύλη
$y = x - 2e^x$, η οποία είναι κοίλη γιατί $y' = 1 - 2e^x$ και $y'' = -2e^x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Έστω P ένας πραγματικός αριθμός με $0 \leq P \leq 1$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση
$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{Px^3}{6} + \frac{Px^2}{8} + \alpha x + \beta$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{Px^2}{2} + \frac{Px}{4} + \alpha$, και $f''(x) = x^2 - Px + \frac{P}{4}$.
Η $f''(x)$ είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = (-P)^2 - 4\frac{P}{4} = P^2 - P$.
Το πρόσημο της Δ για τις διάφορες τιμές του P φαίνεται απ' τον παρακάτω πίνακα:

$-\infty$		0		1		$+\infty$
	+	0	-	0	+	

α) Αν $P \neq 0$, $P \neq 1$ τότε $\Delta < 0$. Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε α, $\beta \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
β) Αν $P = 0$ ή $P = 1$ τότε η f'' είναι θετική στο $\mathbb{R}$ εκτός από ένα σημείο στο οποίο μηδενίζεται. Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η f σύμφωνα με τον ορισμό, στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ά ομάδα

1. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιοριστούν (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων.

α) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 4$ **β)** $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$

γ) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ **δ)** $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

ε) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ **στ)** $f(x)= \dfrac{1}{3+x^2}$

ζ) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ **η)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

θ) $f(x) = x\ln x - x^2$ **ι)** $f(x) = \ln x + 2x^2$

ια) $f(x) = xe^{2x}$ **ιβ)** $f(x) = \sigma\varphi x$, $x\in(0, \pi)$

ιγ) $f(x) = 2e^{x-1} - x^2$ **ιδ)** $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0, 2\pi]$

ιε) $f(x) = x^2(\ln x - 1)$ **ιστ)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

ιζ) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

2. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιοριστούν τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) των γραφικών τους παραστάσεων.

α) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x^2 + 6x + 4, & x > 1 \\ x^3 - 18x + 16x, & x \le 1 \end{cases}$ **β)** $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2, & x < 0 \\ -x^3, & x \ge 0 \end{cases}$

γ) $f(x) = x|x^2 - 6x|$ **δ)** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 14x + 8, & x \ge 1 \end{cases}$

ε) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2, & -4 \le x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 1, & 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$ **στ)** $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & -2\pi \le x < 0 \\ x^3 - 9x^2 + x, & 0 \le x \le 5 \end{cases}$.

3. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ έχει τρία σημεία καμπής, εκ των οποίων τα δύο είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

4. Αν $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha\in(0,4)$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \alpha x^3 + 3\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι κυρτή σ' όλο το $\mathbb{R}$.

5. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να υπολογιστεί το πλήθος των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha}{2}x^3 + (\alpha^2 + 2)x^2 + x + 2\alpha$.

6. Θεωρούμε της συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + 2\alpha x^3 - 6x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το α ώστε η C_f να έχει:

α) ένα σημείο καμπής

β) δύο σημεία καμπής

γ) κανένα σημείο καμπής.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{2}x^2 + \alpha x + 5\alpha^2$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6\alpha x^2 + 5\alpha x - 6\alpha^2 - 16\alpha^3 + 2$. Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει πάντα ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = x^2 + 2$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Β΄ ομάδα</u>

1. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)[3(f'(x))^2 + 5] = 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής και η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

2. Έστω μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $3[f'(x)]^5 + 4f'(x) = \frac{x^2}{2} - x - e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής και η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x$. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα κι ένα σημείο καμπής. Αν x_1, x_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων και x_3 θέση σημείου καμπής, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι συμμετρικά ως προς το $\Gamma(x_3, f(x_3))$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3\alpha^2 x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το α ώστε στο σημείο $x_o = 1$ η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

β) Για τη θετική τιμή του α, που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά, όπου x_1, x_2 θέσεις τοπικών ακροτάτων της f και x_3 θέση σημείου καμπής της C_f.

5. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας κυρτής συνάρτησης f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε οποιοδήποτε σημείο της $A(x_o, f(x_o))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός απ' το A.

6. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} + f(x)$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

7. Να βρεθούν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x^2+\beta}$ να έχει σημείο καμπής το $M\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

8. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A(0, 1) και να αποδειχθεί ότι $e^x + x^2 \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. **α)** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x^2$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A(1, -1).
γ) Να αποδειχθεί ότι $\ln x - x^2 + x \leq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

10. **α)** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln x - \pi^2x^2 + \eta\mu(\pi x)$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(1, -\pi^2)$.
γ) Να αποδειχθεί ότι $\ln x - \pi^2x^2 + \eta\mu(\pi x) \leq (1 - 2\pi^2 - \pi)x + \pi^2 + \pi - 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα α, β ώστε τα σημεία $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ να είναι θέσεις σημείων καμπής. Ποια είναι η τιμή του γ ώστε τα σημεία καμπής να βρίσκονται στον άξονα x'x;

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα ενώ η C_f παρουσιάζει τρία σημεία καμπής τα οποία είναι συνευθειακά.

13. Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f 3ου βαθμού ώστε να παρουσιάζει ακρότατο στο x = 1, το O(0, 0) να είναι σημείο καμπής της C_f, και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_2 = 2$ να είναι παράλληλη στην ευθεία ε: y = 9x + 10.

14. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6\alpha x^2 - 15\alpha^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η C_f παρουσιάζει ένα σημείο καμπής για κάθε $α \in \mathbb{R}$.
β) Να βρεθεί το α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της να είναι κάθετη στην ευθεία $x - 3y + 2 = 0$.

15. Θεωρούμε μια συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $[f(x)]^2 + 2xf(x) + 4x^2 = 2x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αx^5 + βx^4 + γx^3 + δx^2 + εx + ζ$, $α, β, γ, δ, ε, ζ \in \mathbb{R}$, η οποία έχει τρία διαφορετικά σημεία καμπής. Να αποδείξετε ότι ισχύει $3β^2 > 5αγ$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(x) \cdot [f'(x)]^2 + x^3 f'(x) = 5$, να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

18. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f''(0) = 0$ και $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

19. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) > 0$ και $g'(x) > 0$, $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$, να δείξετε ότι η συνάρτηση gof είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

20. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και στο $x_o \in (α, β)$ είναι $f'(x_o) = 0$.
α) Αν η f είναι κυρτή στο [α, β], να αποδειχθεί ότι το $f(x_o)$ είναι ελάχιστο.
β) Αν η f είναι κοίλη στο [α, β], να αποδειχθεί ότι το $f(x_o)$ είναι μέγιστο.

21. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ, με κ< λ και η συνάρτηση $f(x) = (x - κ)^5(x - λ)^3$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq κ$ και $x \neq λ$ είναι: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{5}{x-κ} + \dfrac{3}{x-λ}$.
β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ είναι κοίλη στο διάστημα (κ, λ).

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 24x - 2 + 6x^2\ln x$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

23. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και α < β, να αποδειχθεί ότι $f(x) - f(α) \leq f'(β)(x - α)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + e^{f(x)} = 1 + x - x^2 - e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

α) η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής,

β) η f έχει ακριβώς ένα σημείο που είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

25. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

26. **α)** Έστω f παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση, ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Να αποδειχθεί ότι $f(α) + f(β) \geq 2f\left(\dfrac{α+β}{2}\right)$ για κάθε $α, β\in Δ$.

β) Έστω g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) > [g'(x)]^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει

$g\left(\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.