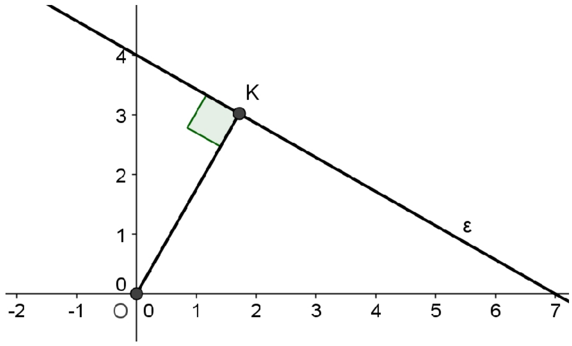
ΜΕΓΙΣΤΗ - ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

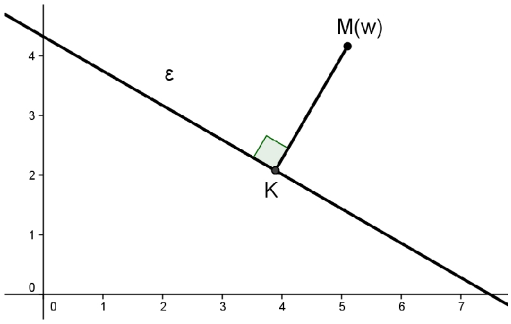
1. Για να αποδείξουμε ανισώσεις που περιέχουν μέτρα μιγαδικών αριθμών, χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα : $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, η οποία μπορεί να γραφτεί και $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$ αν αντικαταστήσουμε όπου z_2 το $-z_2$.

2. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z κινείται σε ευθεία ε, τότε η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με την απόσταση (ΟΚ) της αρχής των αξόνων από την ευθεία ε, ενώ μέγιστη τιμή δεν υπάρχει.

❖ Για να βρούμε το μιγαδικό z_1 που έχει το ελάχιστο μέτρο, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ΟΚ και ε.

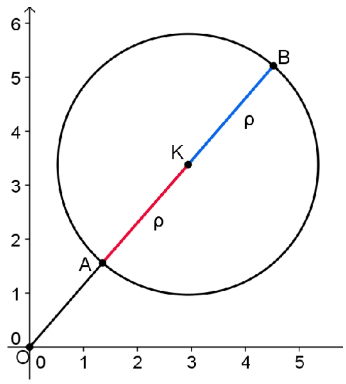


3. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z κινείται σε ευθεία ε και w είναι ένας σταθερός μιγαδικός αριθμός, τότε η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι ίση με την απόσταση ΜΚ της εικόνας του w από την ευθεία ε, ενώ μέγιστη τιμή δεν υπάρχει.
Θυμίζουμε ότι αν το σημείο Κ έχει συντεταγμένες $K(x_o, y_o)$ και η ευθεία ε έχει εξίσωση
ε: $Ax + By + \Gamma = 0$, τότε $d(K,\varepsilon) = \dfrac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.



4. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z κινείται σε κύκλο (Κ, ρ), τότε βρίσκουμε την απόσταση (ΟΚ) του κέντρου του κύκλου από την αρχή των αξόνων.
Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με (ΟΑ) = |(ΟΚ) – ρ| και η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με (ΟΒ) = (ΟΚ) + ρ.

❖ Για να βρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2 που έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου (Κ, ρ) και της ευθείας ΟΚ.



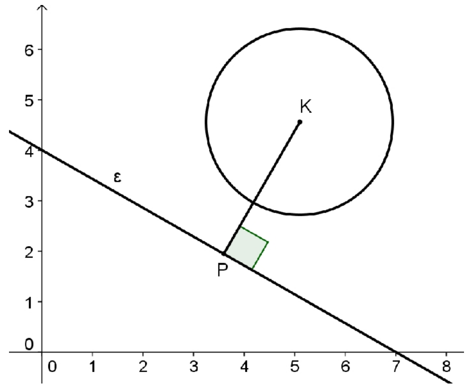
5. Αν οι εικόνες δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 κινούνται στον ίδιο κύκλο (Κ, ρ), τότε η μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$ ισούται με 2ρ, ενώ η ελάχιστη τιμή ισούται με 0.

6. Αν οι εικόνες δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 κινούνται στην ίδια έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ ή $\dfrac{x^2}{\beta^2}+\dfrac{y^2}{\alpha^2}=1$, με α > β, τότε η μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$ ισούται με 2α και η ελάχιστη τιμή του με 0.

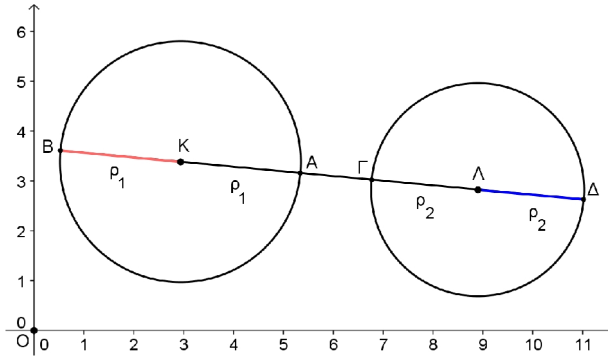
Αν οι εικόνες των z_1, z_2 είναι αντιδιαμετρικά σημεία, τότε η μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ ισούται με 2α και η ελάχιστη τιμή του με 2β.

7. Αν οι εικόνες δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 κινούνται στην ίδια υπερβολή εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ή $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, αλλά σε διαφορετικούς κλάδους, τότε η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ ισούται με 2α, ενώ μέγιστη τιμή δεν υπάρχει.

8. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z κινείται σε κύκλο (K, ρ) και η εικόνα του μιγαδικού w κινείται σε ευθεία ε εξωτερική του κύκλου, τότε βρίσκουμε την απόσταση (KP) του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ε.
Η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ είναι ίση με (KP) – ρ, ενώ μέγιστη τιμή δεν υπάρχει.

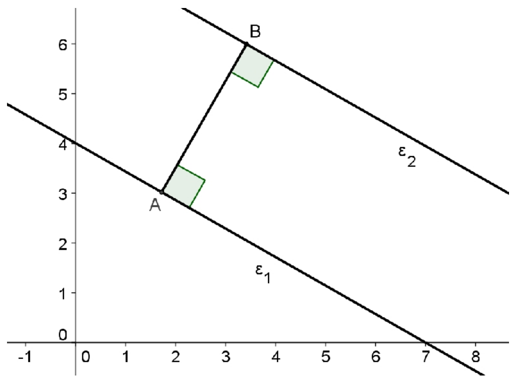


9. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z κινείται σε κύκλο (K, ρ_1) και η εικόνα του μιγαδικού w κινείται σε κύκλο (Λ, ρ_2) με τον έναν κύκλο να είναι εξωτερικός του άλλου, τότε υπολογίζουμε τη διάκεντρο (ΚΛ).
Η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ είναι ίση με
(ΑΓ) = (ΚΛ) – ρ_1 – ρ_2, ενώ μέγιστη τιμή ισούται με (ΒΔ) = (ΚΛ) + ρ_1 + ρ_2.
(Στην περίπτωση που οι κύκλοι τέμνονται ή εφάπτονται εξωτερικά, τότε η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ είναι ίση με 0)



10. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z κινείται σε ευθεία ε_1 και η εικόνα του μιγαδικού w κινείται σε ευθεία $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_1$, τότε η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ είναι ίση με την απόσταση (AB) των δύο παράλληλων ευθειών, ενώ μέγιστη τιμή δεν υπάρχει.
Θυμίζουμε ότι η απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1, ε_2 με εξισώσεις ε_1: $y = \lambda x + \beta_1$, ε_2: $y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται από τον τύπο :

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν ισχύει $|z-2-i|=5$,να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z-14-6i|$.

2. Δίνεται η εξίσωση $|z-2+4i|=\sqrt{5}$.
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.
β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

3. Αν $|z-1-2i|=4$, να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή
α) του $|z|$,
β) του $|z-13-7i|$.

4. Αν $z = 1 + (1 – i) + (1 – i)^2 +\ldots+ (1 – i)^{\nu}$ $\nu \in N^*$, να αποδειχθεί ότι
$2^{\frac{\nu+1}{2}}-1\le|z|\le 2^{\frac{\nu+1}{2}}+1$.

5. α) Αν $z = 3 + 4i$ και $w\in C$, με $|w| = 10$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z+w|$.
β) Να βρείτε τον w, αν οι εικόνες των z και w βρίσκονται πάνω σε ευθεία, που περνά από την αρχή των αξόνων.

6. Αν $z\in C$, ώστε $|z+4i|\le 1$, να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z-3|$ και οι τιμές του z για τις οποίες παίρνει μέγιστο και ελάχιστο.

7. Δίνονται οι $z, w\in C$. Αποδείξτε ότι :
α) Αν $\left|\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = 1$, τότε $|z| = 1$ ή $|w| = 1$.
β) Αν $|z| < \sqrt{3}$ - 1, τότε $|2z\eta\mu\theta+z^2| < 2$.

8. Αν η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, όπου $\alpha, \beta\in IR$, έχει ρίζες τους μιγαδικούς $z_1 = 3 + 2i$ και z_2, τότε:
α) να βρείτε τους α, β και z_2.
β) να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ο μιγαδικός $w = z_1^{\nu}+z_2^{\nu}$ είναι πραγματικός.
γ) να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης $f(z) = |z-z_1|+|z-z_2|$, $z\in IR$.

9. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta\in I\!R$ και $w = 3z – i\overline{z} +4$, όπου $\overline{z}$ είναι ο συζυγής του z.
α) Να αποδείξετε ότι $Re(w) = 3\alpha – \beta + 4$ και $Im(w) = 3\beta – \alpha$.
β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x – 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x – 2$.
γ) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται

στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο. (Πανελλαδικές 2003)

10. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right| = 6$ και $\left|w-(1-i)\right| = \left|w-(3-3i)\right|$, τότε να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.
β) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.
γ) την ελάχιστη τιμή του $|w|$.
δ) την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$. (Πανελλαδικές 2008)

11. Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$, όπου $z \in \mathbb{C}$, με $z \neq 0$.

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.
β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$.
γ) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i| = |z_1 - z_2|$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.
δ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος (γ), να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$.
(Πανελλαδικές 2010)

12. Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται σε κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα 2, τότε:

α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $w = z + \frac{2}{z}$.
β) αν $w_1 = z_1 + \frac{2}{z_1}$, $w_2 = z_2 + \frac{2}{z_2}$ και οι εικόνες των z_1, z_2 κινούνται στον κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα 2, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

13. Θεωρούμε τα σημεία Ε, Ε΄ που είναι εικόνες των φανταστικών αριθμών $z_1 = 2i$ και $z_2 = -2i$ αντίστοιχα, όπως και τα σημεία M_1, M_2 που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w_1, w_2 αντίστοιχα. Αν ισχύουν : $(M_1E΄) - (M_1E) = 2$ και $(M_2E) - (M_2E΄) = 2$, να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w_1,
β) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w_2,
γ) την ελάχιστη τιμή του $|w_1 - w_2|$.

14. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $|2iz - 2 - 6i| = 2|z - 5 - 3i|$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

15. α) Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{z-2i}{2iz+1}$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

16. Αν για τον μιγαδικό αριθμό $w = 2x + (2y - 1)i,\ x, y \in IR$ ισχύει $|w-1-i| = 2\sqrt{5}$, να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο,

β) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

17. α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει $|(1-i)z-2| = 2$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w για τον οποίο ισχύει $\left|\dfrac{w+2i}{w-2+4i}\right| = 1$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

18. α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $\dfrac{1}{|z-3i|} + \dfrac{1}{|z+3i|} = \dfrac{10}{|z^2+9|}$.

β) Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος και είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

19. Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $z = \dfrac{1+2w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο K(-1, 0) και ακτίνα ρ = 1.

α) Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το O(0, 0) και ακτίνα ρ = 1.

β) Αν $|z| = 1$ (1) και z_1, z_2, z_3 οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η (1), να δείξετε ότι :

i) ο αριθμός $\alpha = \dfrac{z_1+z_2}{z_3} + \dfrac{z_2+z_3}{z_1} + \dfrac{z_3+z_1}{z_2}$ είναι πραγματικός.

ii) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1}\right) = -\dfrac{3}{2}$, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

γ) Δίνεται η ευθεία ε: 3x + 4y – 12 = 0. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία ε. (ΟΕΦΕ 2010)

20. α) Αν $z = 4\lambda + (-4\lambda + 6)i,\ \lambda \in IR$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος C_1 των εικόνων του μιγαδικού z.

β) Αν ισχύει $|w-1-5i| = |w+3-i|$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος C_2 των εικόνων του μιγαδικού w.

γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.