ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να μελετήσουμε και να χαράξουμε τη γραφική παράταση μιας συνάρτησης f ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

2. Εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια.

3. Βρίσκουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f, όπου ορίζεται και κατασκευάζουμε τους πίνακες προσήμων τους. Με τη βοήθεια του πίνακα της πρώτης παραγώγου της f, προσδιορίζουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f, ενώ με τη βοήθεια του πίνακα της δεύτερης παραγώγου της f προσδιορίζουμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

4. Εξετάζουμε πως συμπεριφέρεται η f στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της. Δηλαδή βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της C_f, και τα όρια στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f δεν ορίζεται, αλλά και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ (αν έχει νόημα).

5. Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα τα συγκεντρώνουμε σε ένα συνοπτικό πίνακα (πίνακας μεταβολών της f). Στη συνέχεια χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.

Παρατηρήσεις

1. Μπορούμε για την πιο εύκολη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω:
Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y, ενώ μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση f με συμμετρικό πεδίο ορισμού A ως προς το 0, είναι άρτια αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$ και περιττή αν $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x \in A$.

2. Αν μια συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T, τότε αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους T.

3. Για την πιο εύκολη χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης μπορούμε να σημειώσουμε πρώτα απ' όλα στο σχήμα τις ασύμπτωτες ευθείες της C_f, (με διακεκομμένη γραμμή) και τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα καθώς και τα σημεία καμπής της C_f.

4. Για την πιο ακριβή σχεδίαση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f μπορούμε:

- να κατασκευάσουμε έναν πίνακα τιμών της f,
- να βρούμε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u>

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

<u>Λύση</u>

1. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει:

$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Δηλαδή πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Η f είναι συνεχής στο A ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

3. Για κάθε $x \in A$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{x}{\ln x}\right)' = \dfrac{\ln x - x\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

Το πρόσημο της f΄ η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		e		$+\infty$
f΄	‖	-	‖	-	0	+	
f	‖	↘	‖	↘	e Τ. Ε.	↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (0, 1) και (1, e] και γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = e το f(e) = e.

Επίσης για κάθε $x \in A$ είναι: $f''(x) = \left[\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}\right]' = \dfrac{\dfrac{1}{x}(\ln x)^2 - (\ln x - 1)2\ln x\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^4} =$

$\dfrac{\ln x - 2\ln x + 2}{x(\ln x)^3} = \dfrac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$.

Το πρόσημο της f'', η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της C_f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$2 - \ln x$	‖	+	‖	+	0	-	
$(\ln x)^3$	‖	-	‖	+		+	
f''	‖	-	‖	+	0	-	
f	‖	∩	‖	∪	$\dfrac{e^2}{2}$ Σ. Κ.	∩	

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(0, 1)$ και $[e^2, +\infty)$, ενώ είναι κυρτή στο $(1, e^2]$.

Το σημείο $A(e^2, \dfrac{e^2}{2})$ είναι σημείο καμπής της C_f.

4. Κατακόρυφες ασύμπτωτες για τη C_f θα αναζητήσουμε στα σημεία $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right) = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x} = 0$.

Άρα η $x = 0$ δεν είναι ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{\ln x} = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x = 0$ και $\ln x < 0$ για $x < 1$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{\ln x} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x = 0$ και $\ln x > 0$ για $x > 1$.

Άρα η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Πλάγια ασύμπτωτη για τη C_f θα αναζητήσουμε στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x}{\ln x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x} = 0 = \lambda$.

και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, σύμφωνα με το Θεώρημα De L'Hospital είναι:

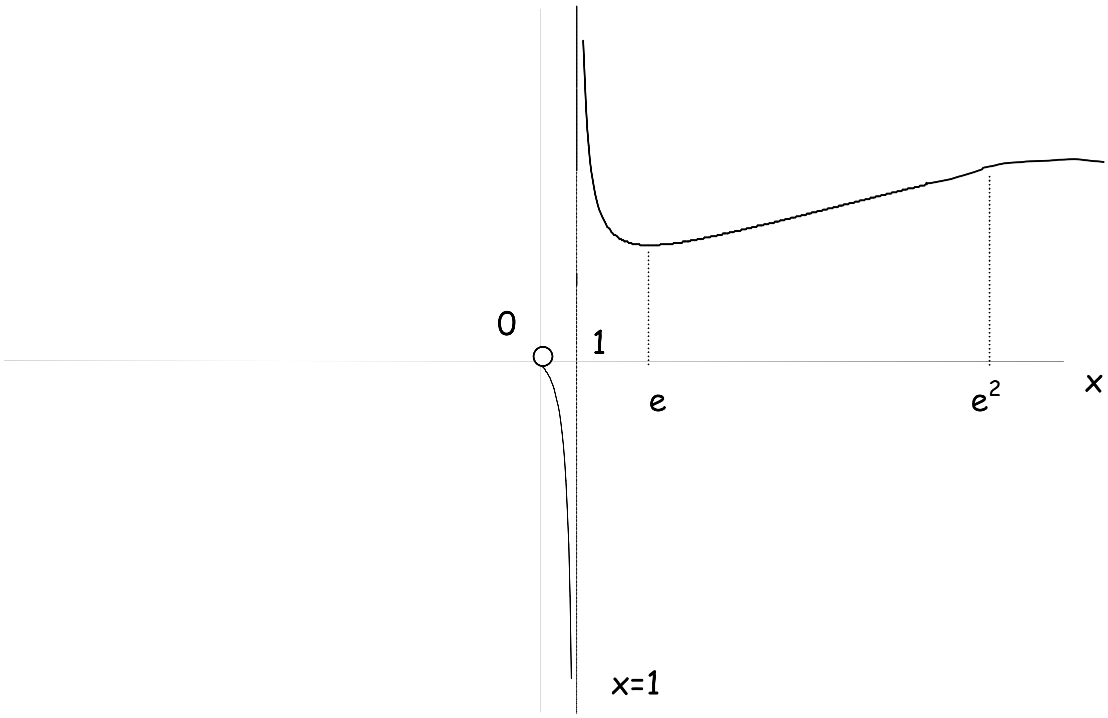
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty .$$

Επομένως η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

5. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	0		1		e		e^2		$+\infty$
f'	‖	-	‖	-	0	+		+	
f''	‖	-	‖	+		+	0	-	
f	‖ 0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	e Τ. Ε.	↗	$\frac{e^2}{2}$ Σ. Κ.	↗	$+\infty$

Η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω:



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ και με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης να βρεθεί πότε η εξίσωση $x^3 + 2x^2 - 4 = μ$ έχει όλες τις πραγματικές της ρίζες.

Λύση

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.
2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.
3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 4)' = 3x^2 + 4x = x(3x + 4)$.

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ ή $x = -\frac{4}{3}$.

$f'(x) > 0 \iff x > 0$ ή $x < -\frac{4}{3}$.

Το πρόσημο της f΄ η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
f΄		+		-		+	
f		↗	$\boxed{-\frac{76}{27}}$ Τ. Μ.	↘	Τ. Ε. $\boxed{-4}$	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ και $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{4}{3}, 0]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -\frac{4}{3}$, το $f(-\frac{4}{3}) = -\frac{76}{27}$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = -4$.

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f''(x) = (3x^2 + 4x)' = 6x + 4$.

$f''(x) = 0 \iff x = -\frac{2}{3}$

$f''(x) > 0 \iff x > -\frac{2}{3}$

Το πρόσημο της f΄΄, η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της C_f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
f΄΄		-	0	+	
f		$\frown$	$\frac{-92}{27}$ Σ. Κ.	$\smile$	

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -\frac{2}{3}]$ και κυρτή στο $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

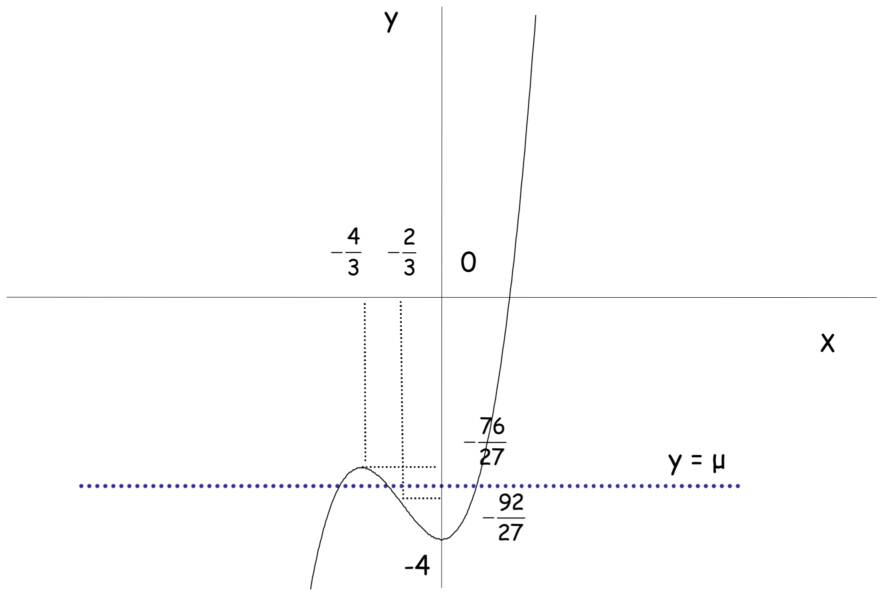
Το σημείο $A(-\frac{2}{3}, \frac{-92}{27})$ είναι σημείο καμπής της C_f.

4. Εφόσον η f είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες.
Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ και
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

5. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
f΄		+	0	-		-	0	+	
f΄΄		-		-	0	+		+	
f	$-\infty$	↗	$-\frac{76}{27}$ Τ. Μ.	↘	$\frac{-92}{27}$ Σ. Κ.	↘	-4 Τ. Ε.	↗	$+\infty$

Η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω:



Για την εξίσωση $x^3 + 2x^2 - 4 = μ$, θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$, $g(x) = μ$. Η γραφική παράσταση της g είναι η ευθεία ε $y = μ$. Λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και της ε. Έτσι για να είναι οι 3 ρίζες της εξίσωσης πραγματικές, πρέπει η ευθεία να τέμνει τη C_f σε τρία σημεία ή να εφάπτεται της C_f στα $Α(-\frac{4}{3}, -\frac{76}{27})$, $Β(-\frac{2}{3}, \frac{-92}{27})$ και αυτό γίνεται $-4 \le μ \le -\frac{76}{27}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

Λύση

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{1\}$.

2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}\right)' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 3$.

Το πρόσημο της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'		+	0	-	‖	-	0	+	
f		↗	-4 Τ. Μ.	↘	‖	↘	Τ. Ε. 4	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 1)$, $(1, 3]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -1$, το $f(-1) = -4$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 3$ το $f(3) = 4$.

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f''(x) = \left[\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\right]' =$

$$\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

Είναι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{1\}$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της f'', η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της C_f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-	‖	+
f	∩	‖	∪

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1)$και κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Το σημείο $x_o = 1$ αλλάζει η κυρτότητα, αλλά δεν έχουμε σημείο καμπής γιατί το $x_o = 1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

4. Κατακόρυφες ασύμπτωτες: Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-2x+5}{x-1} = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-2x+5\right) = 4 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0$ με $x - 1 < 0$.

Επίσης $= \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-2x+5}{x-1} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-2x+5\right) = 4 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$ με $x - 1 > 0$.

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Πλάγιες ασύμπτωτες: Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2-x} =$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$.

και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - \lambda x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}-x\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x+5}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{x} = -1 = \beta$.

Επομένως η $y = x - 1$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

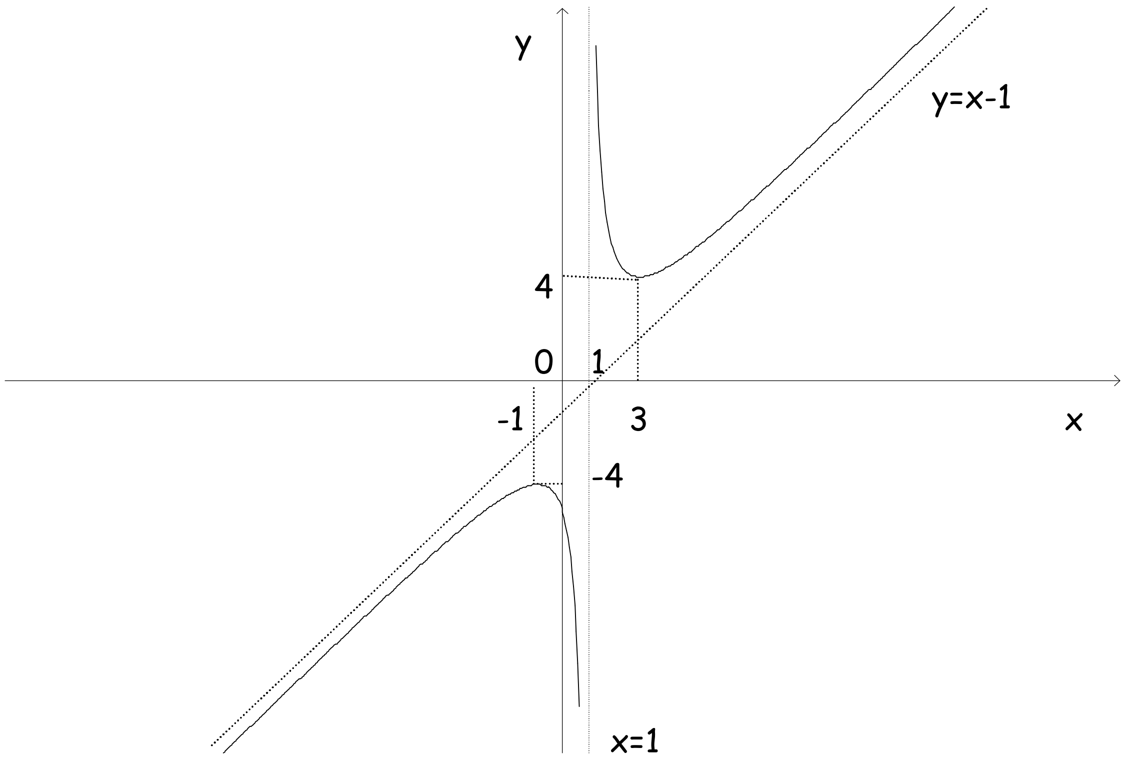
Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}x = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}x = -\infty$.

5. *Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:*

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'		+	0	-	‖	-	0	+	
f''		-		-	‖	+		+	
f	$-\infty$		-4 Τ. Μ.		$-\infty$ ‖ $+\infty$		Τ. Ε. 4		$+\infty$

Η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ **β)** $f(x) = x^4 - 8x^2$

2. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ **β)** $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

3. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ **β)** $f(x) = x - \frac{1}{x}$

γ) $f(x) = x + \frac{9}{x}$.

4. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$ **β)** $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$.

5. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ **β)** $f(x) = \frac{e^x}{x}$

γ) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ **δ)** $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

ε) $f(x) = \ln x - x + 1$ **στ)** $f(x) = xe^x$

ζ) $f(x) = \frac{1+x\ln x}{x}$ **η)** $f(x) = (x+1)\cdot(\ln x + 1)$

θ) $f(x) = x^2 - 2\ln x$ **ι)** $f(x) = \ln(\eta\mu x),\ x \in (0, \pi)$.

6. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [0, \pi]$ **β)** $f(x) = \sigma\varphi x,\ x \in (0, \pi)$

γ) $f(x) = \varepsilon\varphi x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **δ)** $f(x) = x + \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [-\pi, \pi]$

ε) $f(x) = \eta\mu^3 x - 3\eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$ **στ)** $f(x) = 2x + \eta\mu x,\ x \in [0, 2\pi]$

7. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_o = 2$ και το $A(1, -1)$ να είναι σημείο καμπής της C_f. Στη συνέχεια να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f.

8. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + \beta}{x - 1}$, να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_o = 1$ και η C_f να διέρχεται απ' το σημείο $A(-1, -\dfrac{5}{2})$.

Στη συνέχεια να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f.

9. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^3 + (1 - \lambda)x^2 - x + 1 = 0$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{2ax} - \ln x + \ln a$, $a > 0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - a^2 = 2ax(\ln x - \ln a)$.
γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.
δ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.
ε) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της C_f.
στ) Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι $\ln\dfrac{\alpha}{\beta} > \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$.